En vinkel på Trigonometri

Anvendelse og Beviser

Øvelser

Ø1 Gå et bevis for vinkelsummen i en trekant.
Ø2 Trekanter - hvad er nok at vide?
Ø3 Pythagoras
Ø4A Skygger (Hvis altså solen skinner)
Ø4B Snorstråle (Hvis den ikke gør)
Ø5 Ensvinklede trekanter.
Ø6A Målinger i Naturen - ensvinklede trekanter
Ø6B Målinger i Naturen - Sinus Kvadrant
Ø7 Ud i Svanninge Bjerge.
Ø8 De trigonomiske funktioner.

Introduktion

Spørgsmålet om, hvorvidt matematik er opdaget eller opfundet, er vist ikke endeligt afgjort. Måske er det begge dele?

Med denne samling af øvelser vil du erfare, at med ganske få regler (i matematik kaldet aksiomer), gode ideer og logiske argumenter, kan du komme ret langt med indsigt i hvad matematik er og hvordan matematik kan anvendes.

Øvelserne 1-5 foregår samlet ét sted, hvor du vil få en fornemmelse af hvordan matematik kan blive til. Du vil også få indsigt i hvordan man ved at måle det nære, kan beregne sig frem til noget i det fjerne.

Denne indsigt skal du bruge når du selvstændigt skal løse opgaver ude i Svanninge Bjerge, med øvelse 6.

De såkaldte trigonomiske funktioner, cosinus, sinus og tangens bliver anvendt inden for fantastisk mange fagområder. De er defineret helt matematisk stringent, men også en smule abstrakt. Med de første 6 øvelser vil du have opnået rumlig fornemmelser og erfaring med nogle sammenhænge, der vil være en hjælp til forstå hvorfor definitionen af cosinus, sinus og tangen er genial og hvorfor den kan bruges til beregninger i for eksempel retvinklede trekanter. Dette sker i øvelse 7, som er ren teoretisk.

Samlet set kommer øvelserne omkring vinkelsummen i en trekant, de 5 trekantstilfælde, retvinklede trekanter og Pythagoras, ensvinklede trekanter og skaleringsfaktoren, samt de trigonomiske funktioner tangens, cosinus og sinus.

Øvelserne kræver ikke brug af anden litteratur og computer, men målebånd, lommeregner og en Sinus Kvadrant.

Husk at tage billeder af de sider i skriver på, så er det mindre vigtigt hvis papirerne bliver væk.

Ø1 Gå et bevis for vinkelsummen i en trekant

Hvad vi har:

- Vores næse og den retning den peger i, som vinkelmåler.
- Drejer vi én hel gang rundt om os selv, har vi drejet 360°.

Det må betyde, at hvis vi går og vender om og går tilbage derfra vi kom, skal vi dreje næsen 360°/2=180°. Vores krop er symmetrisk og har fire hjørner; næse, højre arm, nakke og venstre arm. Der må derfor være 360°/4=90° mellem hvert hjørne.

Metode:

- Gå kun sidelæns og drej om dig selv, så den ene hånd ikke kommer uden for figuren.

Opgave:

- Benyt den viden som du har fra at gå kvadratet og de værktøjer vi har, til at undersøge hvad summen af vinklerne i en trekant må være.

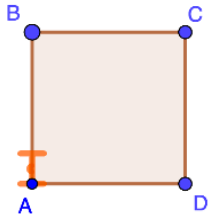
  Bemærk! Der er en vigtig forskel fra før! Vi vidste at vinklen i kvadratet er 90°, for det er en definition, men nu kender i ikke størrelserne på vinklerne…

Hint: Vinkelsummen i et kvadrat

Vi efterprøvede næsen som vinkelmåler i et kvadrat dannet af 4 grene. Et kvadrat er defineret som en firkant hvor alle sider er lige lange og alle vinkler er 90°. Summen af vinklerne i et kvadrat må derfor være 360°.

Fremgangsmåde:

- Vi startede med begge ben på den ene af rektanglets sider ved hjørnet A, og noterede os i hvilken retning næsen var rettet imod omgivelserne.
- Så gik vi sidelæns mod hjørnet B.
- Ved B skulle vi videre mod C og må kun gå sidelæns - vi drejede derfor om os selv.
- For at måle vinklen inde i kvadratet skulle vi dreje den vej om os selv, hvor den ene hånd hele tiden blev inde i kvadratet.
- Det gentog vi ved C og ved D….. og ved A.
- Ved hvert hjørne drejede vi om os selv præcis det antal grader som vinklen inden i trekanten er. Da turen rundt i kvadratet var slut, stod vi med næsen rettet samme vej som da vi startede. Vi har altså undervejs drejet én hel gang rundt om os selv, hvilket vil sige at vi er drejet 360°. Jamen, så må vinkelsummen i et kvadrat være 360°.



Ø2 Trekanter - hvad er nok at vide?

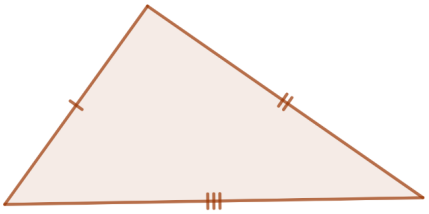
Hvad vi har:

- En trekant består af 3 sider og 3 vinkler, så der er i alt 6 oplysninger om en trekant.
- Summen af vinklerne er 180°.

Vi efterprøvede sammen, at vi kun kunne danne én trekant, hvis vi kender længden på de tre sider. Længden af de 3 sider fastlægger altså de 3 vinkler.

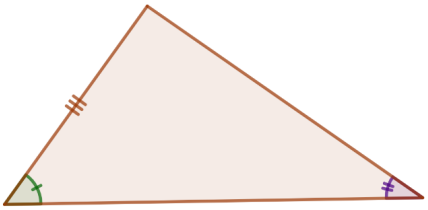
Påstand: alt man behøver at vide for at fastlægge **én** bestemt trekant er 3 oplysninger:

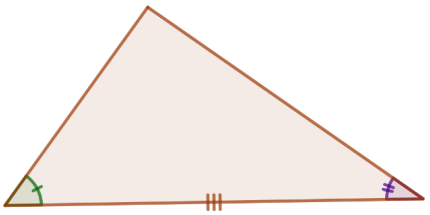
3 sider:



eller

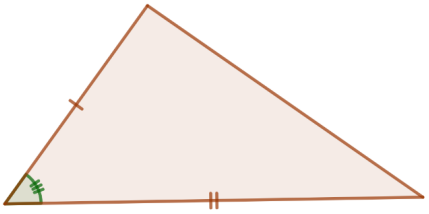
2 vinkler og 1 side:

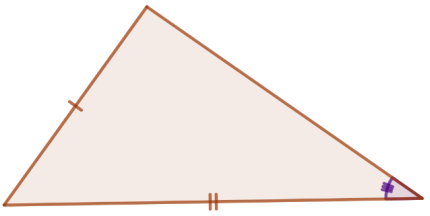




eller

1 vinkel og 2 sider:

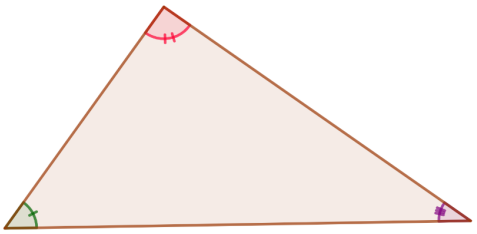




Opgave:

- Brug grenene til at undersøge, om påstanden om at tre oplysninger nok til at fastlægge én bestemt trekant, er rigtig.

- Hvorfor er nedenstående tilfælde med 3 oplysninger udeladt?



Ø3 Pythagoras og den retvinklede trekant

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180°.
- Tre pløkker, en rulle garn og en saks.
- Pythagoras læresætning.

Opgave:

- Anvend kun det i har til at danne en retvinklet trekant og argumentér for at den er retvinklet.

Hint:

- Uden målebånd er i nød til selv at beslutte hvor lang 1 er.

(Spørg vejlederen om hints, hvis i går i stå)

Ø4A Skygger (Hvis altså solen skinner)

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180°.
- Alle genstande kaster en skygge, hvis solen skinner (undtagen i helt specielle tilfælde).
- Et målebånd.

Opgave:

- Find 3 forskellige genstande der står lodret op, og som I kan måle højden af. Undersøg hvordan skyggernes længde afhænger af genstandenes højder.

Genstand 1		Genstand 2		Genstand 3	
Højde 1	Skygge 1	Højde 2	Skygge 2	Højde 3	Skygge 3

- Beregn følgende

$$\frac{Højde\ 1}{Højde\ 2} = _____ = \qquad \frac{Skygge\ 1}{Skygge\ 2} = _____ =$$

$$\frac{Højde\ 1}{Højde\ 3} = _____ = \qquad \frac{Skygge\ 1}{Skygge\ 3} = _____ =$$

$$\frac{Højde\ 3}{Højde\ 2} = _____ = \qquad \frac{Skygge\ 3}{Skygge\ 2} = _____ =$$

- Der dannes en trekant af hver genstand, dens skygge og solens stråler. Argumentér for, at de tre trekanter de tre genstande danner, må være ensvinklede. Tegn en skitse til hjælp, på næste side.

Skitse

- Her er en påstand: Ensvinklede trekanter er skaleret med en skaleringsfaktor.
    - Er det sandt?
    - Hvad er jeres argument?
    - Hvad fortæller skaleringsfaktoren noget om?

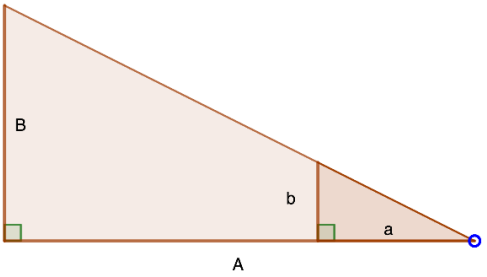
Ø4B Snorstråle (Hvis den ikke gør):

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180°.
- En snor, som danner en ret linje, hvis den holdes stramt nok.
- Et målebånd.
- En pløk.
- Et træ.
- En gren/pind.

Opgave:

- Bind den ene ende af en snor fast på et træ(B). Stram snoren og fastgør den til jorden med pløkken (blå cirkel). I har nu én retvinklet trekant.



- Placér pinden(b) i jorden tre forskellige steder mellem træet og pløkken og beregn følgende:

$$\frac{Højde\ træ(B)}{Højde\ pind(b_1)} = _____ = \qquad \frac{A_1}{a_1} = _____ =$$

$$\frac{Højde\ træ(B)}{Højde\ pind(b_2)} = _____ = \qquad \frac{A_2}{a_2} = _____ =$$

$$\frac{Højde\ træ(B)}{Højde\ pind(b_3)} = _____ = \qquad \frac{A_3}{a_2} = _____ =$$

- Her er en påstand: Ensvinklede trekanter er skaleret med en skaleringsfaktor.
  - Hvorfor er de to trekanter på figuren ensvinklede?
  - Er påstanden sand?
  - Hvad fortæller skaleringsfaktoren noget om?

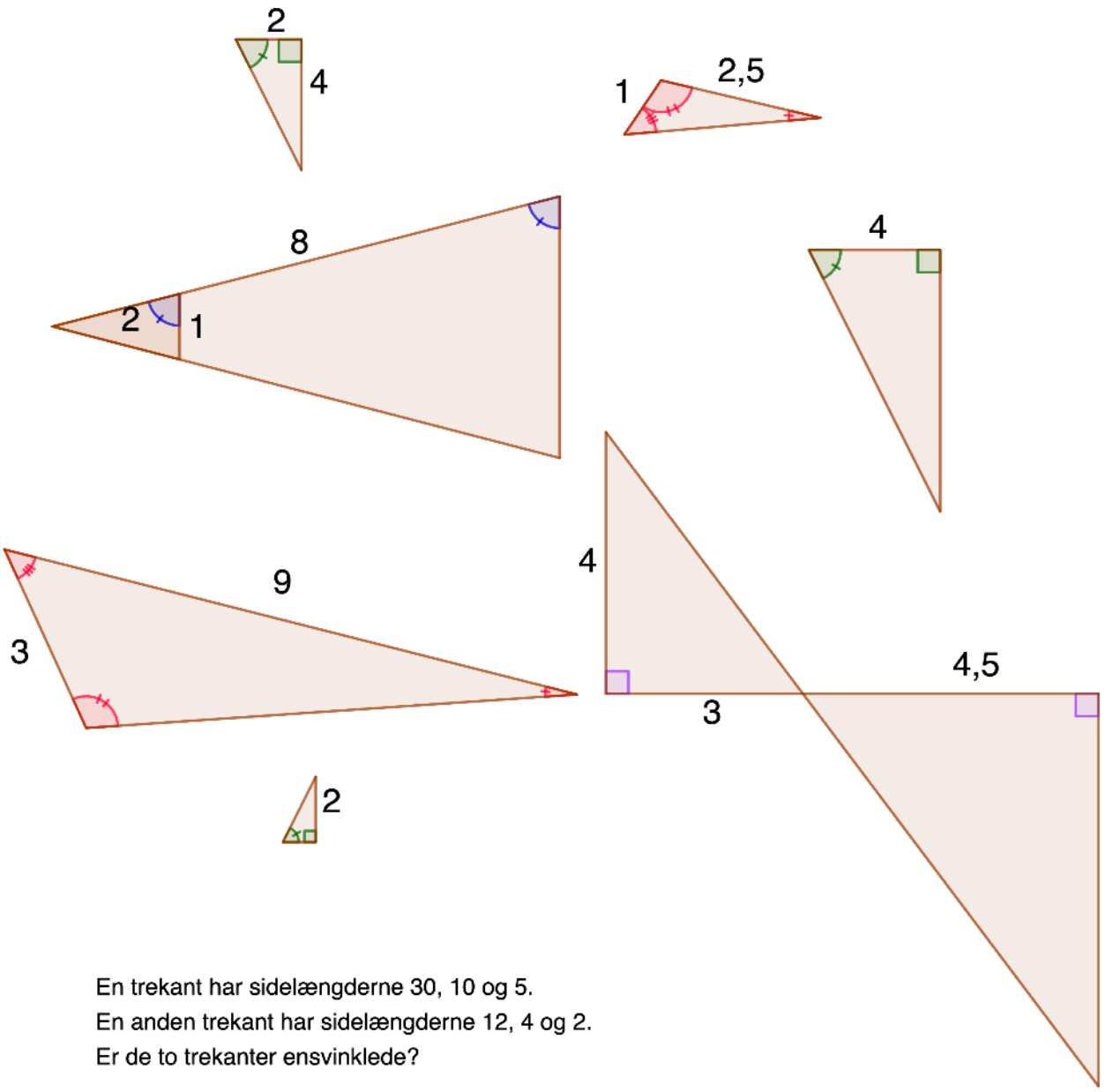
Ø5 Ensvinklede trekanter

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180°.
- Pythagoras læresætning.
- Ensvinklede trekanter kan skaleres med skaleringsfaktoren.

Opgave

- Hvilke trekanter er ensvinklede og hvorfor? Indsæt de manglende sider, hvor det er muligt og bestem skaleringsfaktoren.



En trekant har sidelængderne 30, 10 og 5.
En anden trekant har sidelængderne 12, 4 og 2.
Er de to trekanter ensvinklede?

Ø6A Målinger i Naturen med ensvinklede trekanter

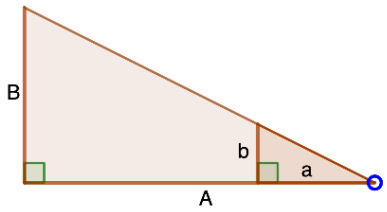
Hvad vi skal bruge nu:

- Ensvinklede trekanter kan skaleres med skaleringsfaktoren.
- En gren eller en person, eller hvad man nu har, som man kan bestemme højden eller længden på.
- Et målebånd og/eller en tommestok.

Skaleringsfaktoren mellem ensvinklede trekanter kan anvendes til at bestemme afstande og højder, vi ikke umiddelbart kan måle. Det kan være højden af et træ.

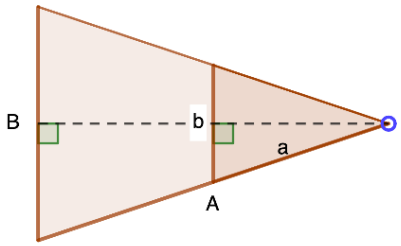
Herunder er der vist tre forskellige geometriske metoder, man kan anvende.

De udnytter skaleringsfaktoren mellem ensvinklede trekanter, til at beregne en side, når man kender de tre andre. Cirklen markerer det sted man står og sigter fra.



Beregning af skaleringsfaktoren k

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = k$$



Bestemmelse af siden B

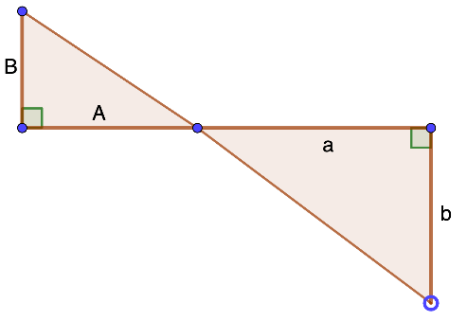
Skriv hvad der sker mellem hvert udtryk:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} \Leftrightarrow$$

$$\frac{A}{a} \cdot b = B \Leftrightarrow$$

$$\frac{A \cdot b}{a} = B \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$



Opgave:

- Diskuter hvordan i kan anvende de to øverste metoder til at bestemme højden af træet på Naturlegepladsen og bestem den. Tegn en skitse af situationen hvor metoden, målingerne og beregningerne fremgår herunder.

Skitse:

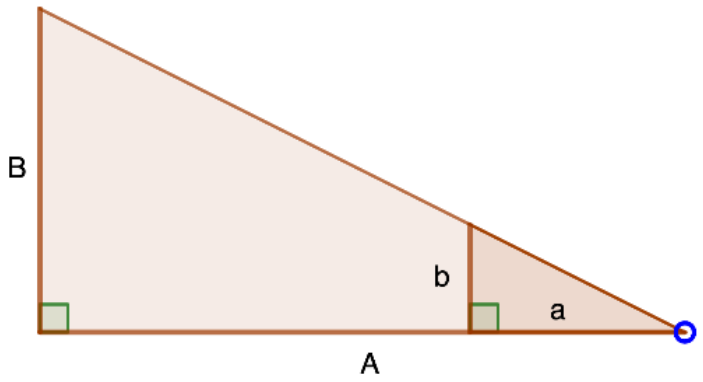
Ø6B Målinger i Naturen med Sinus Kvadrant

De metoder i lige har brugt kræver, at i måler 3 sidelængder, for at kunne beregne den fjerde.

Denne metode kan gøres mere enkelt ved at måle 1 side og 1 vinkel….

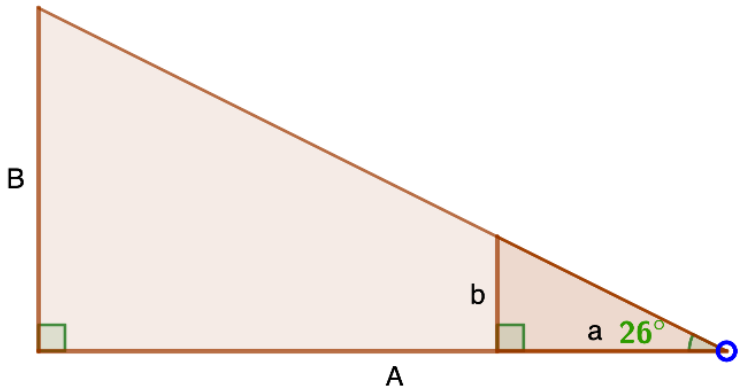
Vinklen kan måles med den udleverede Sinus Kvadrant, men i skal ikke bruge vinklen til beregningen.
I første omgang skal i anvende værdierne på akserne, for så kan i anvende samme formel som før.

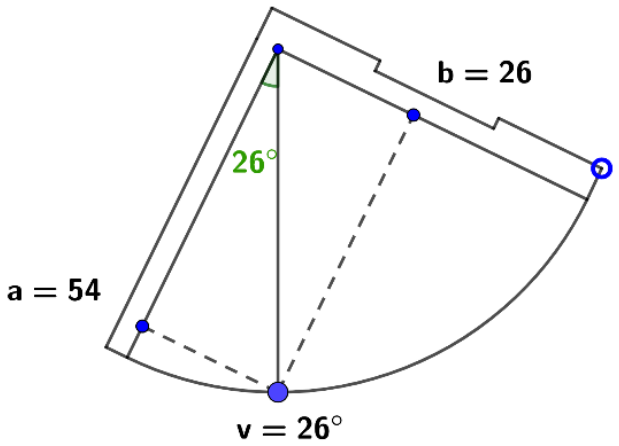
Før:



$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$

Nu (med et taleksemel):





T

Læg eller hold Sinus Kvadranten vandret.

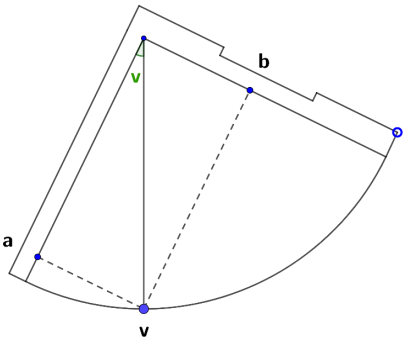
- Sæt snoren til vinklen på 26° og aflæs om I får de samme værdier for a og b, som i eksemplet ovenfor.
- Hvad aflæser i a og b til hvis vinklen er 64°?
- Hvad sker der med a og b når vinklen vokser?
- Hvad sker der med a og b når vinklen bliver mindre?

Brugsvejledning:

Sinus Kvadranten angiver vinklen mellem jordoverfladen og det man sigter på. Den har også to akser, hvor man kan aflæse værdierne a og b.

1. Sigt på det du vil måle vinklen til, og hold snoren fast.
2. Aflæs vinklen og aflæs a og b.
3. Mål afstanden A hen til det det objekt du vil måle afstanden til.
    a. Indsæt tallene i formlen.

$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$



Opgave:

- Benyt Sinus Kvadranten til at bestemme højden af træet på Naturlegepladsen igen. Tegn en skitse af situationen hvor målingerne og beregningerne fremgår herunder.

Skitse:

Ø7 Ud i Svanninge Bjerge

- Der er tre poster i bjergene som i kan finde i Woop-appen (GeoBio Trigonometri).
- I skal løse mindst én opgave ved 2 af posterne.
- Løsningerne skal dokumenteres med billeder og skitser, hvoraf de målte og beregnede værdier fremgår.
- Brug to forskellige metoder (hvis det er muligt), til at løse hver opgave og diskutér fordele og ulemper ved de to metoder.
- Der er "formelsamling" på næste side til inspiration.
- HUSK - brug jeres opfindsomhed til hvad der kan hjælpe jer til opmålingerne OG efterlad området pænere end da i ankom.

Åkande Sø - en gangbro?

1. (*Den svære*) Hvor langt der er fra bredden ud til øen i søen.
2. (*mindre svær*) Hvor langt der er fra bredden ud til øen i søen, hvis øen er 30 m bred.
3. Hvor høje er træerne midt på øen, hvis der er 40 m fra bredden ud til dem?

Gammelt jordfaldshul?

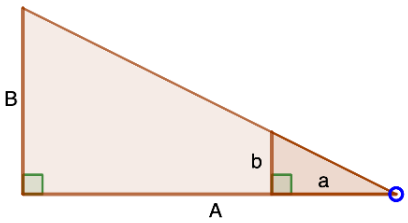
Tynde istidsaflejringer af ler og sand ovenpå kalk kan skabe et jordfaldshul, når vand siver ned og opløser kalken.

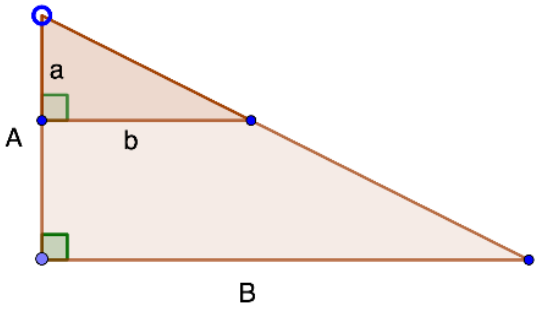
1. Bestem diameteren af hullet i jorden. (Bemærk at der er flere træer, der står på en lige linje på den ene side.)
2. Kan dybden af hullet bestemmes?

Lerbjerg - en issøbakke:

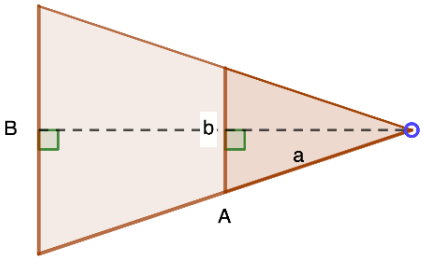
10 km mod vest kan man se det lavvandede område mellem Illumø og Vigø.

1. Hvor langt er der mellem de to øer?
2. Mod syd står der Graner, der skiller sig ud i landskabet - hvor højt er det højeste?

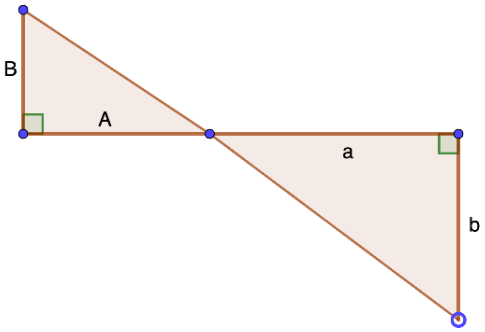


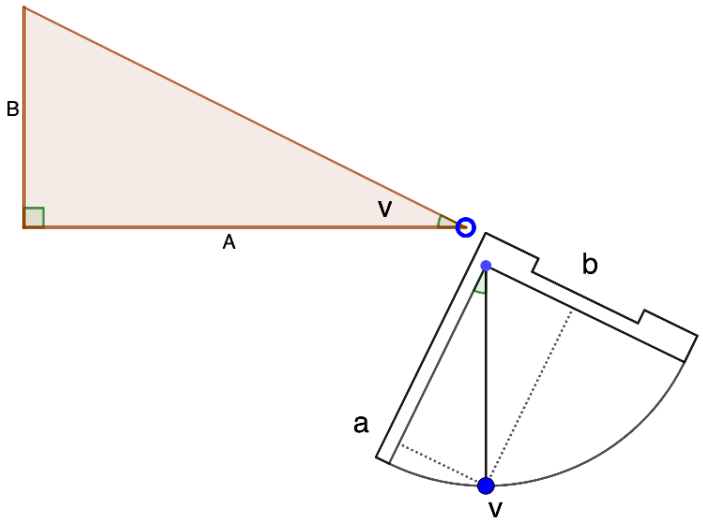


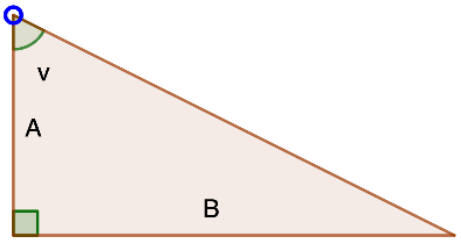
$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

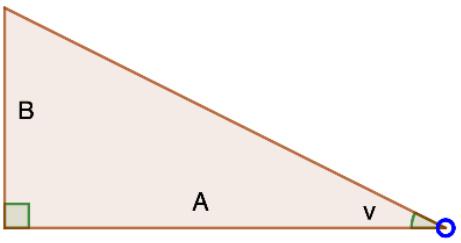


$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$

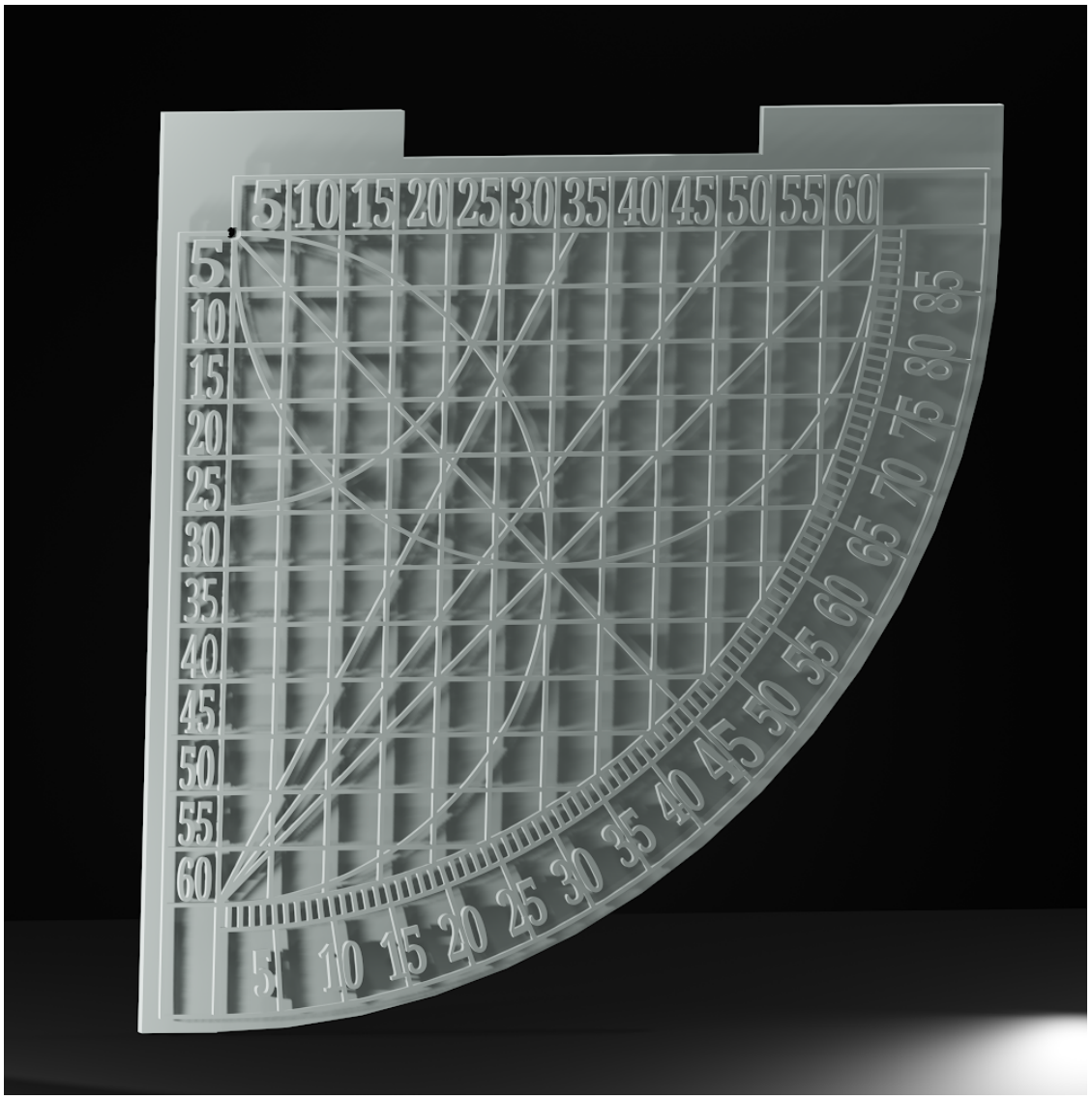








De Trigonometriske funktioner



Det vi har:

Du har frem til nu erfaret, at ensvinklede trekanter kan skaleres med skaleringsfaktoren.

Formlen for skaleringsfaktoren kunne omskrives til formlen i den grå boks nedenfor.

Med to genstande kunne man danne to ensvinklede trekanter, foretage nogle opmålinger og bruge formlen til at beregne højden af, for eksempel et træ.

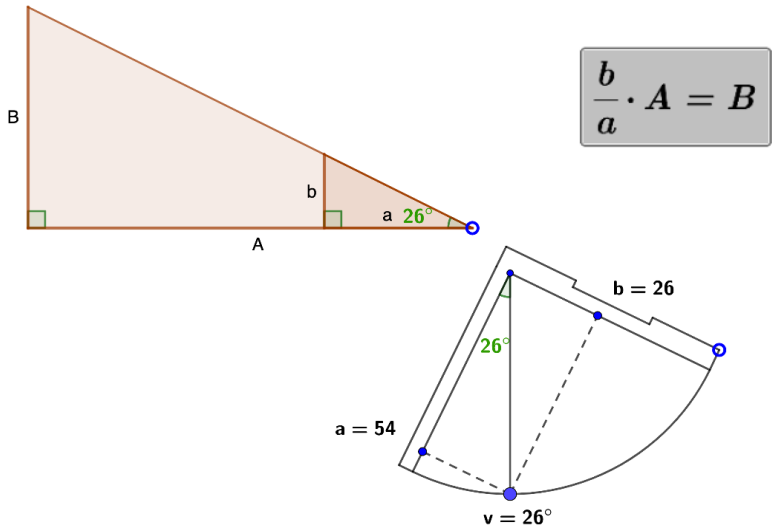
I fik at vide at I også kunne anvende en Sinus Kvadrant, men har ikke fået noget bevis for det.

Sinus Kvadranten (*rub'ul mujayyab*) er en mere end 1000 år gammel analog lommeregner/tabel, hvis funktion nu er indbygget i din lommeregner eller dit CAS-værktøj, som ***cos***, ***sin*** og ***tan***.

Med dine erfaringer med ensvinklede trekanter og Sinus Kvadranten, kender du nu noget af den historiske baggrund for de trigonomiske funktioner; ***cosinus***, ***sinus*** og ***tangens***. Denne øvelse vil tage dig det sidste stykke, til den nutidige definition og anvendelse.

Det sker i følgende 3 trin:

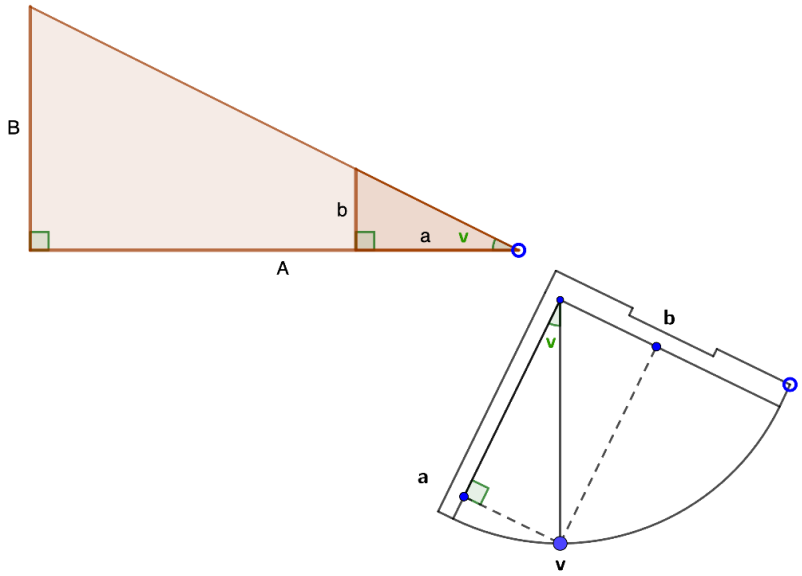
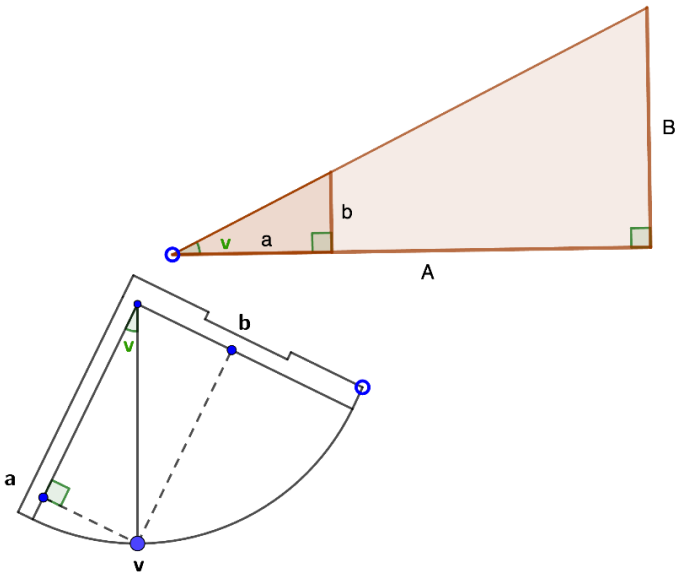
1. Hvorfor formlen i den grå boks også kan bruges med Sinus Kvadranten.
2. Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens.
3. Beregninger i retvinklede trekanter.

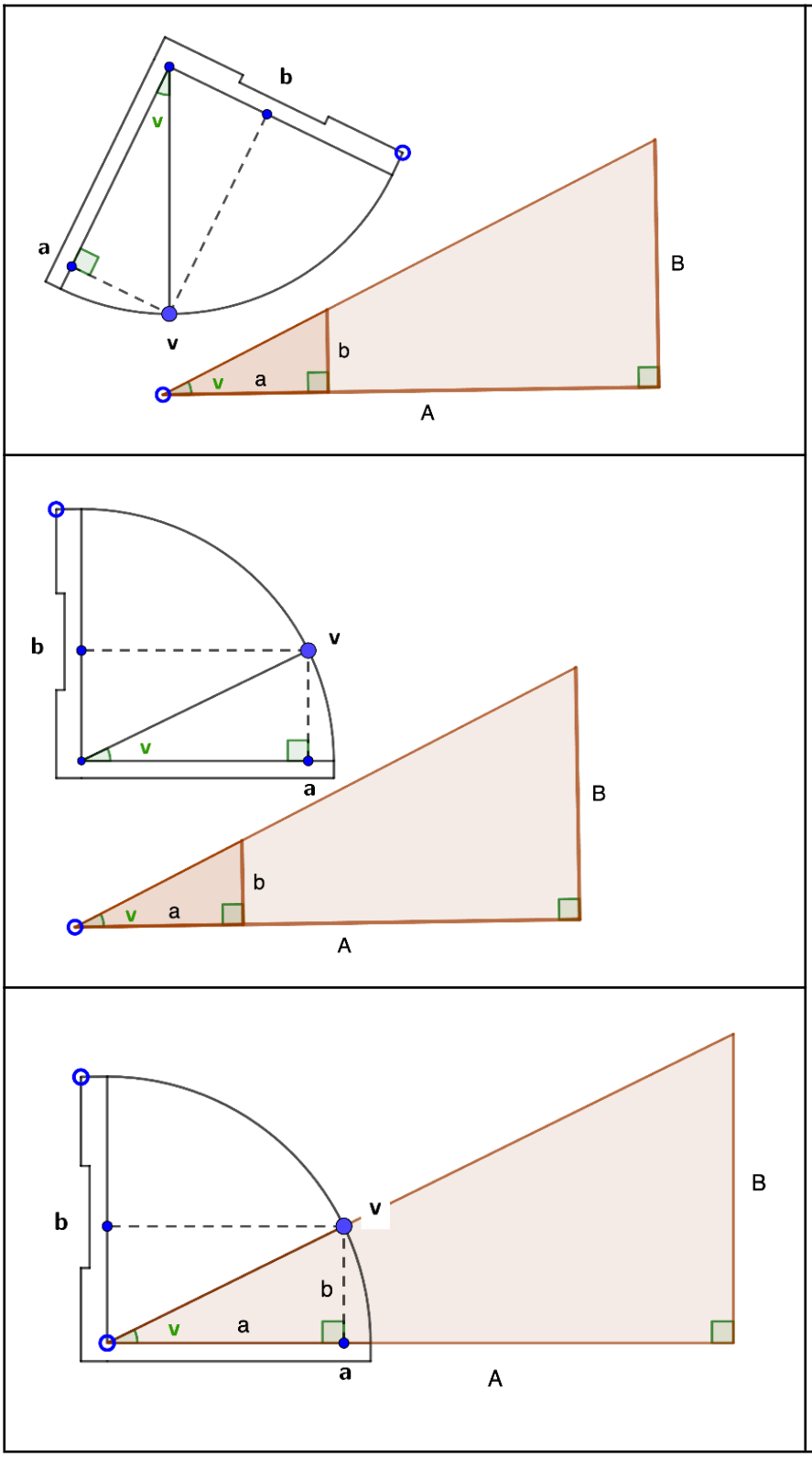


Eksemplet fra brugsvejledningen til bestemmelse af højden af et træ.

1. Hvorfor formlen i den grå boks også kan bruges med Sinus Kvadranten.

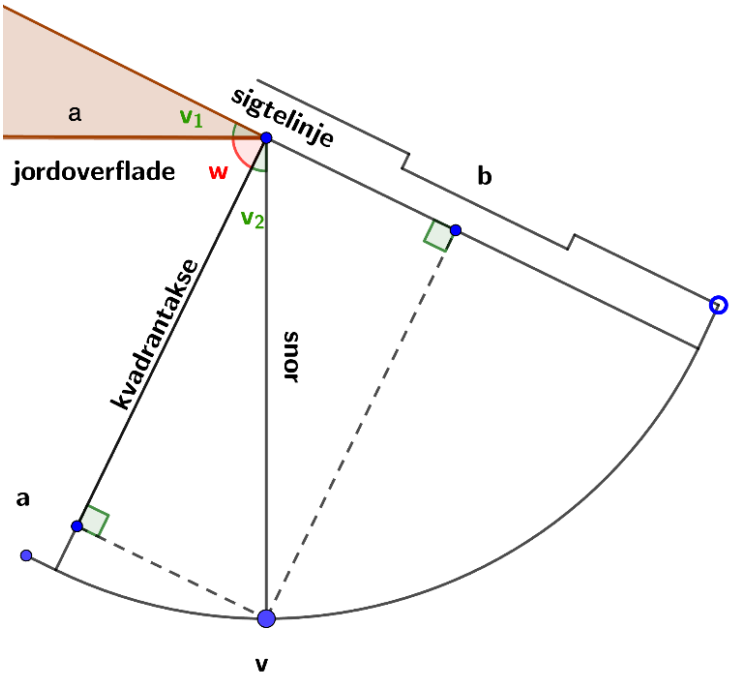
Formlen i den grå boks gælder for ensvinklede trekanter. Så hvis vi kan argumentere for, at trekanten i Sinus Kvadranten er ensvinklet med den store trekant, er vi færdige med argumentet.

Hvad bliver flyttet og hvordan bliver det flyttet, fra billede til billede?	Skriv her
	
	



Ved at spejle, flytte og dreje kan man altså overbevise sig om, at trekanten i Sinus Kvadranten er ensvinklet med den trekant, der dannes, når man måler for eksempel højden af et træ. På næste side er det egentlige matematiske bevis.

Bevis: Vinklen i Sinus Kvadranten v_2 er lig med vinklen v_1 der dannes med jordoverfladen til det man sigter på.



Sinus Kvadranten er ført hen til trekanten og billedet er forstørret, så man bedre kan se vinklerne. Vinklerne har nu også fået hver deres navne.

1. Snoren hænger lodret ned på grund af tyngdekraften og danner derfor en vinkel på 90° med jordoverfladen. (....så man skal altså stå, på et vandret underlag…)

   Derfor må der gælde at:

   $$w + v_2 = 90°$$

2. Sigtelinjen er vinkelret på kvadrantaksen, for sådan er Sinus Kvadranten konstrueret.

   Derfor må der gælde at:

   $$v_1 + w = 90°$$

   Når begge summer giver 90° må der gælde at:

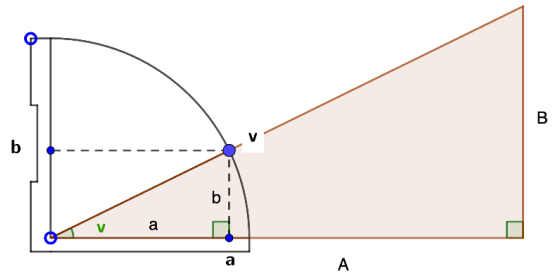
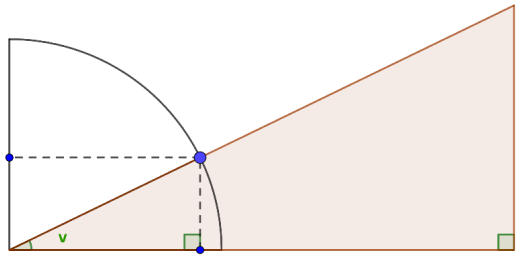
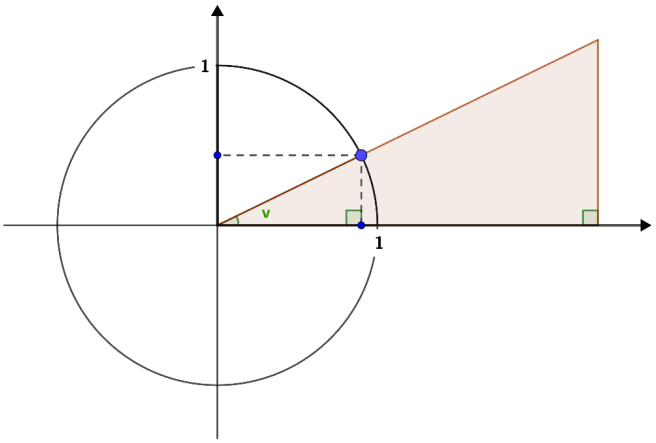
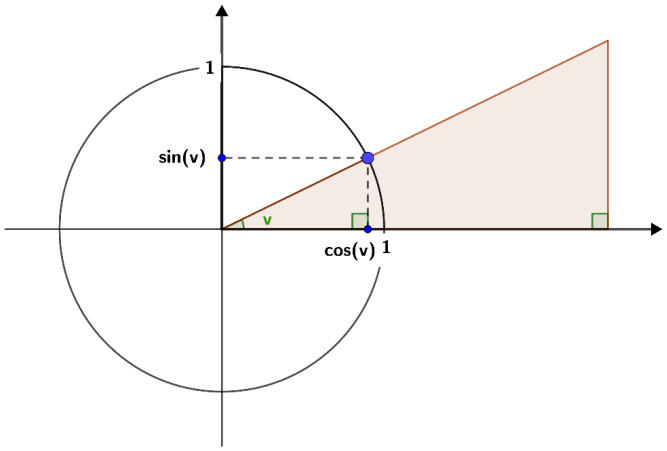
   $$v_1 + w = w + v_2$$

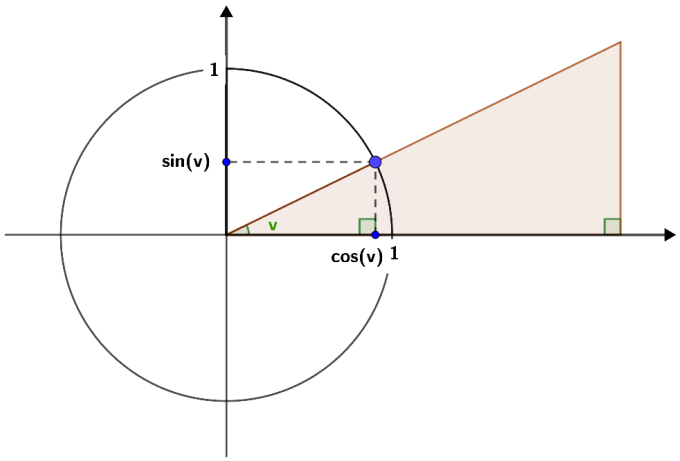
   $$v_1 = v_2$$

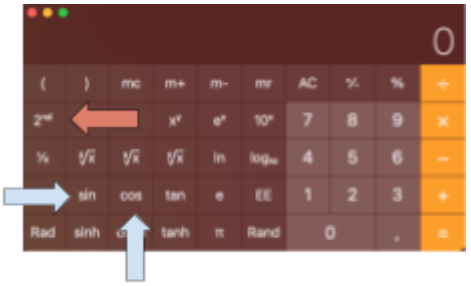
   ■

   Spørgsmål: Hvorfor er dette nok, til at man nu kan argumentere for at de to trekanter er ensvinklede?

2. Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens

	Sinus Kvadranten er placeret så man kan se, at de to trekanter er ensvinklede. Bemærk hvor vi tidligere aflæste a og b, når vi havde målt en vinkel v.
	Sinus Kvadranten er nu fjernet. Kun akserne og buen er tilbage. Bogstaverne er også væk, kun vinklen er tilbage.
	Indfører et koordinatsystem med centrum ved vinklen. Buen forlænges, så der fremkommer en cirkel. Vi *beslutter* at radius på cirklen er 1. Definition på Enhedscirklen: Enhedscirklen er en cirkel med en radius på 1 og centrum i (0,0).
	Hvor vi før aflæste a, ligger nu på x-aksen og vi *beslutter* at kalde den cosinus til v med udtrykket: cos(v) Hvor vi før aflæste b, ligger nu på y-aksen og vi *beslutter* at kalde den for sinus til v med udtrykket: sin(v) Definition på cos og sin: Beskriv billedet hvor du starter med vinklen v, og forklarer hvor man aflæser cos(v) og sin(v).





Fra Sinus Kvadranten til lommeregneren.

Find en lommeregner og se hvad der sker når du taster:

- 26
- cos
- 2nd
- cos^{-1}

<u>COSINUS</u>

- Taster du en vinkel efterfulgt af cos, får du altså værdien af cos(v), som aflæses på x-aksen.

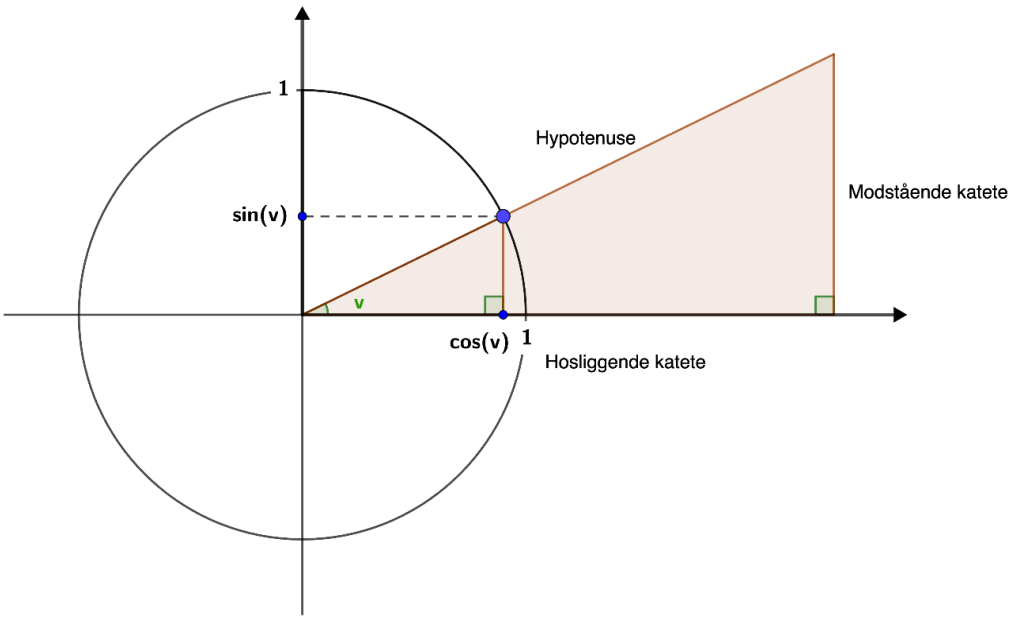
- Har du værdien for cos(v) (altså værdien på x-aksen), men gerne vil have vinklen, taster du cos^{-1}.

<u>SINUS</u>

- Taster du en vinkel efterfulgt af sin, får du værdien af sin(v) som aflæses på y-aksen.

- Har du værdien for sin(v) (altså værdien på y-aksen), men gerne vil have vinklen, taster du sin^{-1}.

3. Beregninger i retvinklede trekanter



Nu hvor sinus og cosinus er defineret, vil vi gerne kunne bruge dem til beregninger i alle retvinklede trekanter. Det kræver et bevis.

Betragt den store trekant.
Vælger vi én bestemt vinkel i en retvinklet trekant, kan vi navngive siderne i forhold til vinklen, som vist på figuren ovenfor.

- Hvorfor er trekanten inde i enhedscirklen og den store trekant ensvinklede?

- Skaleringsfaktoren k, kan beregnes på følgende måder. Hvorfor kan den det?

$$k = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} \qquad k = \frac{\text{Modstående katete}}{\sin(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

- Vi ser nu på to af udtrykkene. Hvad sker der matematisk ved hver pil?

$$k = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} = \frac{\text{Hypotenuse}}{1} = \text{Hypotenuse}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Hosliggende katete} = \text{Hypotenuse} \cdot \cos(v)$$

$$\Updownarrow$$

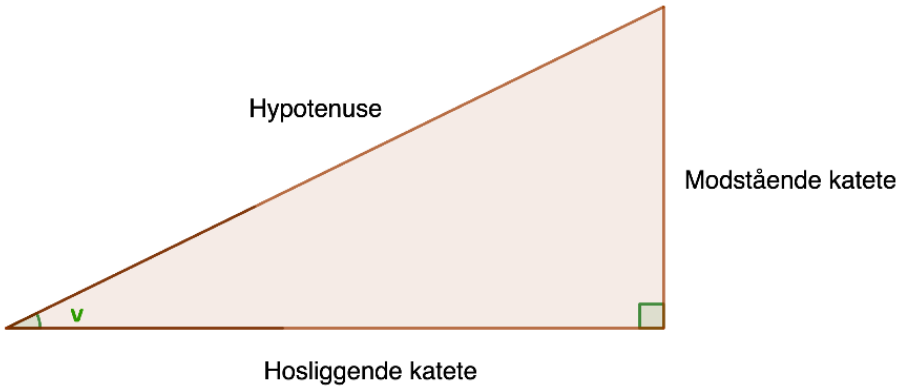
$$\frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos(v)$$

- Vi ser nu på to af de andre udtryk. Forsæt på samme vis som ovenfor.

$$k = \frac{\text{Modstående katete}}{\sin(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

$$\Updownarrow$$

Beregninger i retvinklede trekanter - overblik

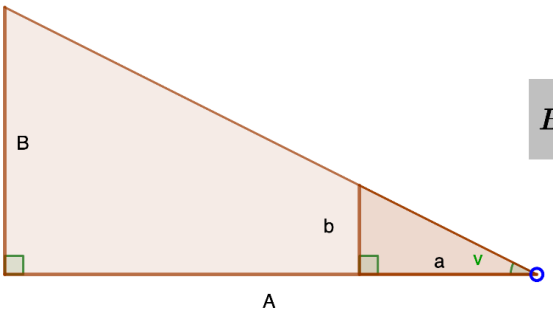


$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan(v) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$

Formlen for tangens er et resultat af, at den er defineret ud fra cosinus og sinus.

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{\frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenuse}}}{\frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Hosliggende katete}} = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$

Nu har vi redskaberne til at bestemme højden af et træ ud fra sigtevinklen, afstanden hen til træet og en lommeregner.



$$B = \frac{b}{a} \cdot A = tan(v) \cdot A$$