

En vinkel på Trigonometri

Anvendelse og Beviser



Øvelser

- Ø1A Målinger i Naturen - ensvinklede trekanter
- Ø1B Målinger i Naturen - Sinus Kvadrant
- Ø2 Ud i Svanninge Bjerge.
- Ø3 De trigonometriske funktioner.
 - Hvorfor formelen i den grå boks også kan bruges med Sinus Kvadranten.
 - Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens.
 - Beregninger i retvinklede trekanter.

Introduktion

Spørgsmålet om, hvorvidt matematik er opdaget eller opfundet, er vist ikke endeligt afgjort. Måske er det begge dele?

Med denne samling af øvelser vil du erfare, at med ganske få regler (i matematik kaldet aksiomer), gode ideer og logiske argumenter, kan du komme ret langt med indsigt i hvad matematik er og hvordan matematik kan anvendes.

Øvelserne 1-5 foregår samlet ét sted, hvor du vil få en fornemmelse af hvordan matematik kan blive til. Du vil også få indsigt i hvordan man ved at måle det nære, kan beregne sig frem til noget i det fjerne.

Denne indsigt skal du bruge når du selvstændigt skal løse opgaver ude i Svanninge Bjerge, med øvelse 6.

Noget om hvad der kræves af forforståelse og noget med indhold.

De såkaldte trigonometriske funktioner, cosinus, sinus og tangens bliver anvendt inden for fantastisk mange fagområder. De er defineret helt matematisk stringent, men også en smule abstrakt. Med de første 6 øvelser vil du have opnået rumlig fornemmelser og erfaring med nogle sammenhænge, der vil være en hjælp til forstå hvorfor definitionen af cosinus, sinus og tangen er genial og hvorfor den kan bruges til beregninger i for eksempel retvinklede trekanter. Dette sker i øvelse 7, som er ren teoretisk.

Samlet set kommer øvelserne omkring vinkelsummen i en trekant, de 5 trekantstilfælde, retvinklede trekanter og Pythagoras, ensvinklede trekanter og skaleringsfaktoren, samt de trigonometriske funktioner tangens, cosinus og sinus.

Øvelserne kræver ikke brug af anden litteratur og computer, men målebånd, lommeregner og en Sinus Kvadrant.

Husk at tage billeder af de sider i skriver på, så er det mindre vigtigt hvis papirerne bliver væk.

Ø1A Målinger i Naturen med ensvinklede trekanter

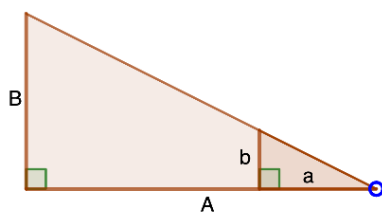
Hvad vi skal bruge nu:

- Ensvinklede trekanter kan skaleres med skaleringsfaktoren.
- En gren eller en person, eller hvad man nu har, som man kan bestemme højden eller længden på.
- Et målebånd og/eller en tommestok.

Skaleringsfaktoren mellem ensvinklede trekanter kan anvendes til at bestemme afstande og højder, vi ikke umiddelbart kan måle. Det kan være højden af et træ.

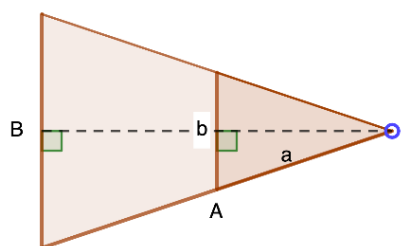
Herunder er der vist fire forskellige geometriske metoder, man kan anvende.

De udnytter skaleringsfaktoren mellem ensvinklede trekanter til at beregne en side, når man kender de to andre. Cirklen markerer det sted man står og sigter fra.



Beregning af skaleringsfaktoren k

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = k$$



Bestemmelse af siden B

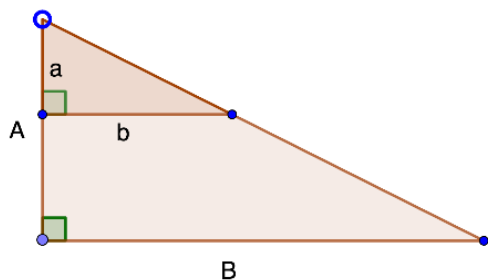
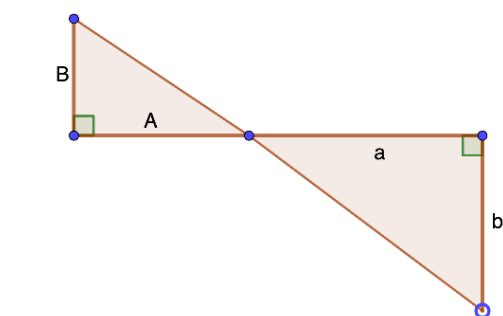
Skriv hvad der sker mellem hvert udtryk:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} \Leftrightarrow$$

$$\frac{A}{a} \cdot b = B \Leftrightarrow$$

$$\frac{A \cdot b}{a} = B \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$



Opgave:

- Diskuter hvordan i kan anvende de to øverste metoder til at bestemme højden af træet på Naturlegepladsen og bestem den. Tegn en skitse af situationen hvor metoden, målingerne og beregningerne fremgår herunder.

Skitse:

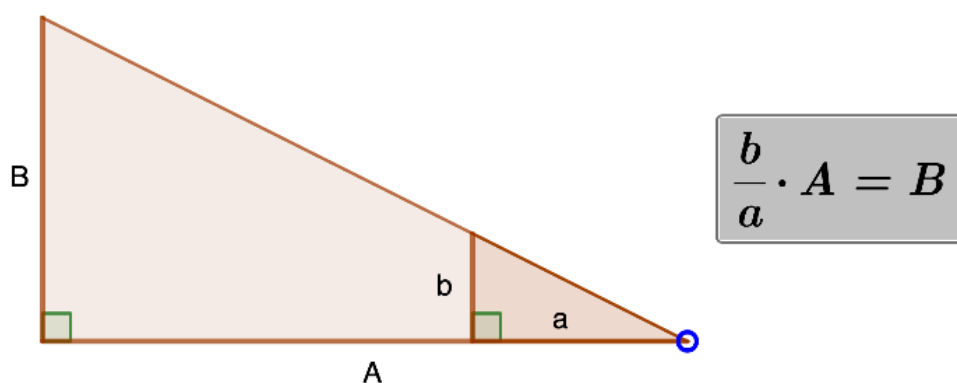
Ø1B Målinger i Naturen med Sinus Kvadrant

De metoder i lige har brugt kræver, at i måler 3 sidelængder, for at kunne beregne den fjerde.

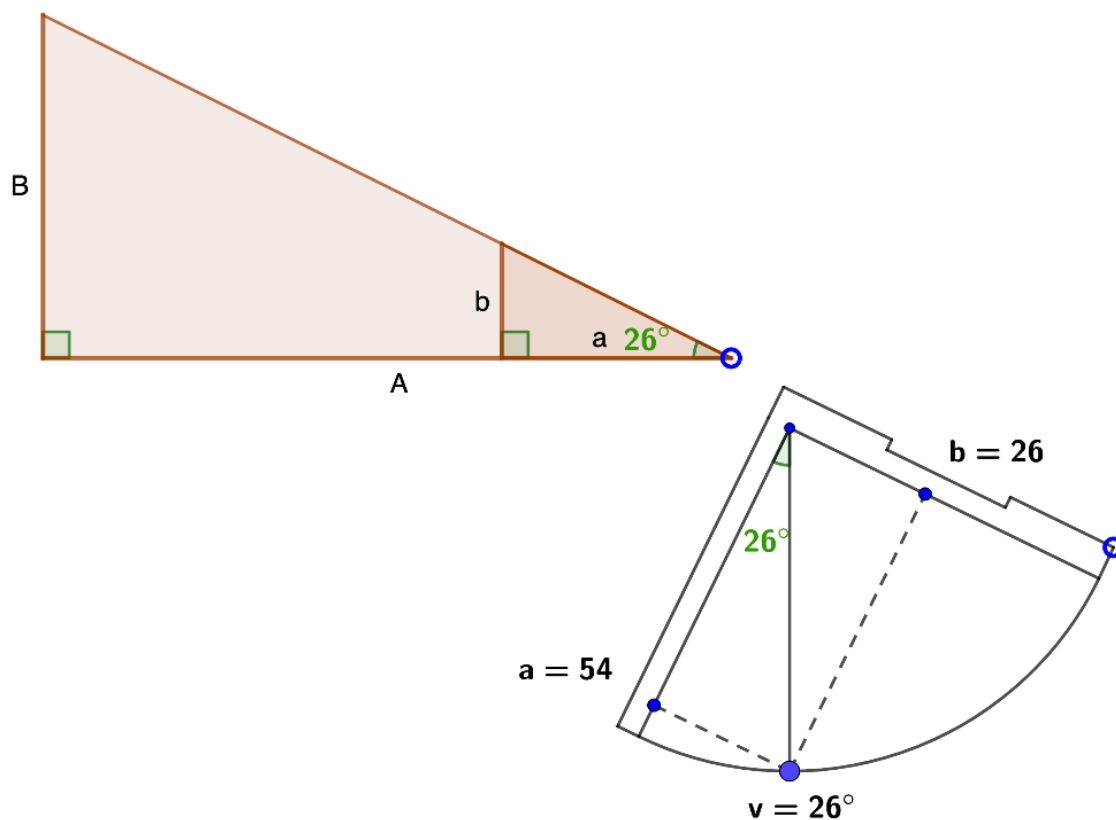
Denne metode kan gøres mere enkelt ved at måle 1 side og 1 vinkel....

Vinklen kan måles med den udleverede Sinus Kvadrant, men i skal ikke bruge vinklen til beregningen. I første omgang skal i anvende værdierne på akserne, for så kan i anvende samme formel som før.

Før:



Nu (med et talekseml):



Træning:

Læg eller hold Sinus Kvadranten vandret.

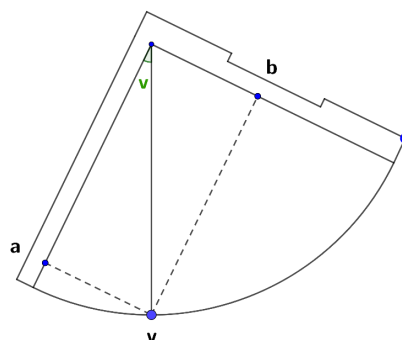
- Sæt snoren til vinklen på 26° og aflæs om I får de samme værdier for a og b, som i eksemplet ovenfor.
- Hvad aflæser i a og b til hvis vinklen er 64° ?
- Hvad sker der med a og b når vinklen vokser?
- Hvad sker der med a og b når vinklen bliver mindre?

Brugsvejledning:

Sinus Kvadranten angiver vinklen mellem jordoverfladen og det man sigter på. Den har også to akser, hvor man kan aflæse værdierne a og b.

1. Sigt på det du vil måle vinklen til, og hold snoren fast.
2. Aflæs vinklen og aflæs a og b.
3. Mål afstanden A hen til det objekt du vil måle afstanden til.
 - a. Indsæt tallene i formelen.

$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$



Opgave:

- Benyt Sinus Kvadranten til at bestemme højden af træet på Naturlegepladsen igen. Tegn en skitse af situationen hvor målingerne og beregningerne fremgår herunder.

Skitse:

Ø2 Ud i Svanninge Bjerge

- Der er tre poster i bjergene som i kan finde i Woop-appen (GeoBio Trigonometri).
- I skal løse mindst én opgave ved 2 af posterne.
- Løsningerne skal dokumenteres med billeder og skitser, hvoraf de målte og beregnede værdier fremgår.
- Brug to forskellige metoder (hvis det er muligt), til at løse hver opgave og diskutér fordele og ulemper ved de to metoder.
- Der er "formelsamling" på næste side til inspiration – tegn gerne på den.
- HUSK - brug jeres opfindsomhed til hvad der kan hjælpe jer til opmålingerne OG efterlad området pænere end da i ankom.

Åkande Sø - en gangbro?

1. (*Den svære*) Hvor langt der er fra bredden ud til øen i søen.
2. (*mindre svær*) Hvor langt der er fra bredden ud til øen i søen, hvis øen er 30 m bred.
3. Hvor høje er træerne midt på øen, hvis der er 40 m fra bredden ud til dem?



Gammelt jordfaldshul?

Tynde istidsaflejringer af ler og sand ovenpå kalk kan skabe et jordfaldshul, når vand siver ned og opløser kalken.

1. Bestem diameteren af hullet i jorden.
(Bemærk at der er flere træer, der står på en lige linje på den ene side.)
2. Kan dybden af hullet bestemmes?

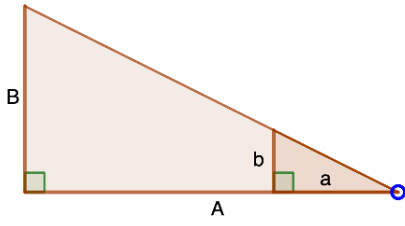


Lerbjerg - en issøbakke:

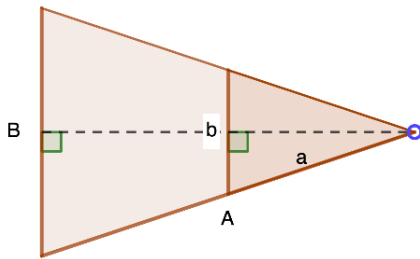
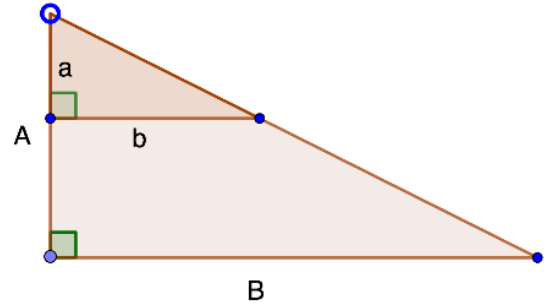
10 km mod vest kan man se det lavvandede område mellem Illumø og Vigø.

1. Hvor langt er der mellem de to øer?
2. Mod syd står der Graner, der skiller sig ud i landskabet - hvor højt er det højeste?

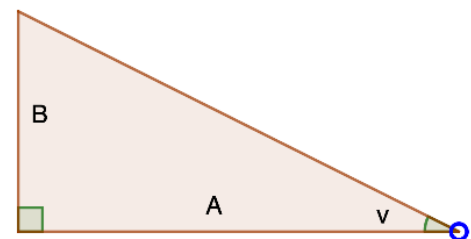
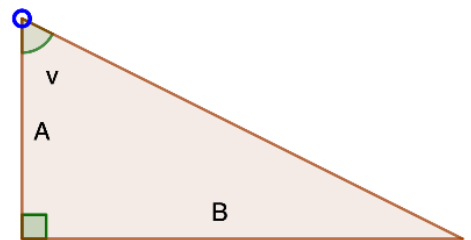
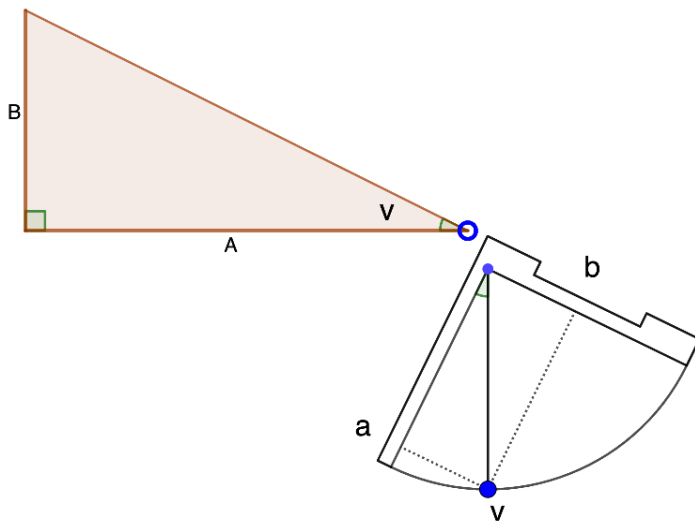
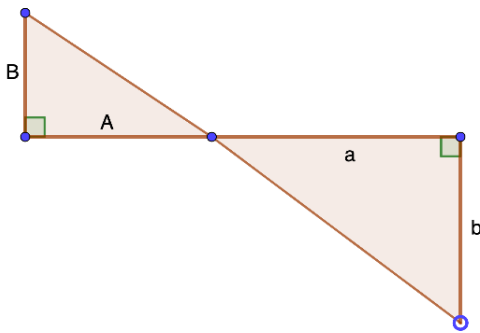




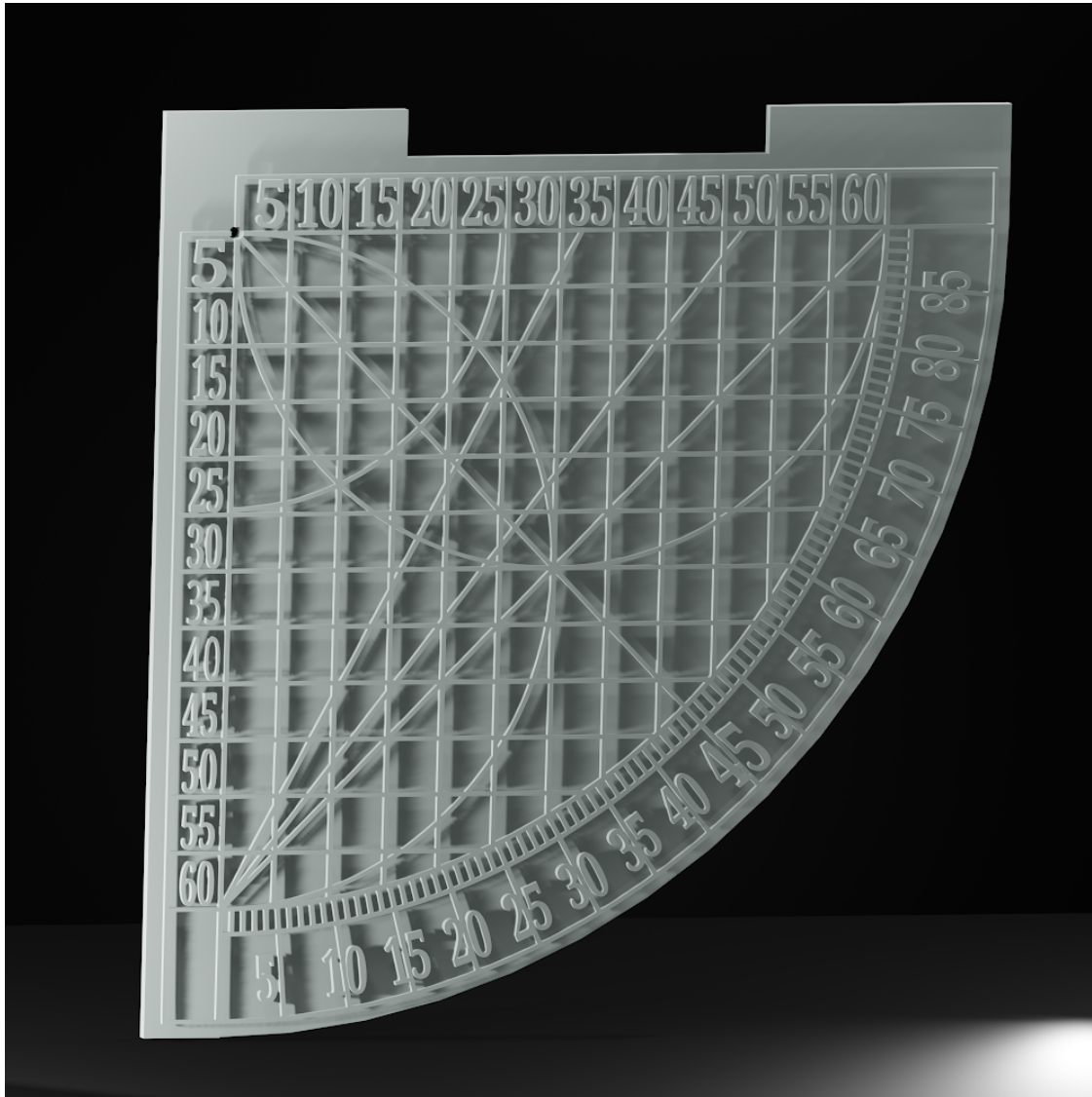
$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$



$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$



De Trigonometriske funktioner



Det vi har:

Du har frem til nu erfaret, at ensvinklede trekanter kan skaleres med skaleringsfaktoren.

Formlen for skaleringsfaktoren kunne omskrives til formen i den grå boks nedenfor.

Med to genstande kunne man danne to ensvinklede trekanter, foretage nogle opmålinger og bruge formelen til at beregne højden af, for eksempel et træ.

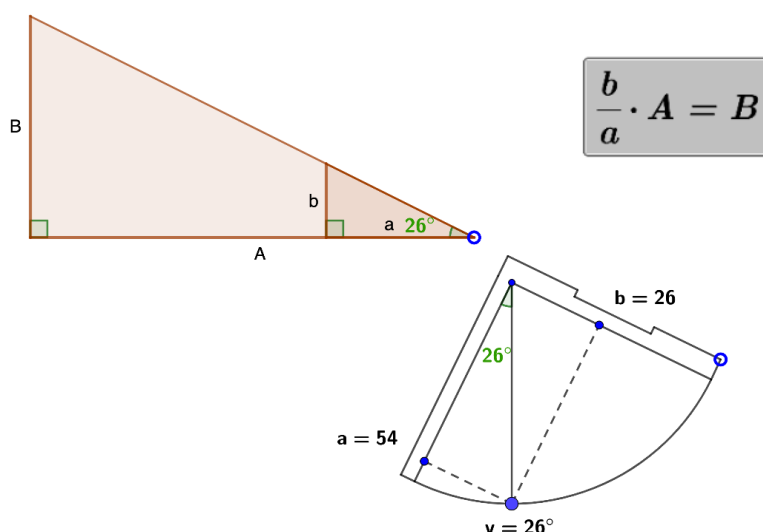
I fik at vide at I også kunne anvende en Sinus Kvadrant, men har ikke fået noget bevis for det.

Sinus Kvadranten (*rub'ul mujayyab*) er en mere end 1000 år gammel analog lommeregner/tabel, hvis funktion nu er indbygget i din lommeregner eller dit CAS-værktøj, som **cos**, **sin** og **tan**.

Med dine erfaringer med ensvinklede trekanter og Sinus Kvadranten, kender du nu noget af den historiske baggrund for de trigonometriske funktioner; **cosinus**, **sinus** og **tangens**. Denne øvelse vil tage dig det sidste stykke, til den nutidige definition og anvendelse.

Det sker i følgende 3 trin:

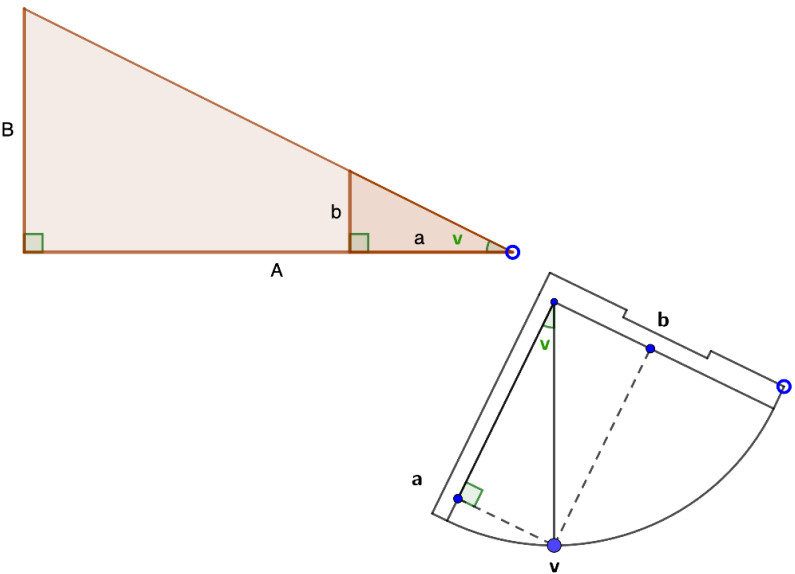
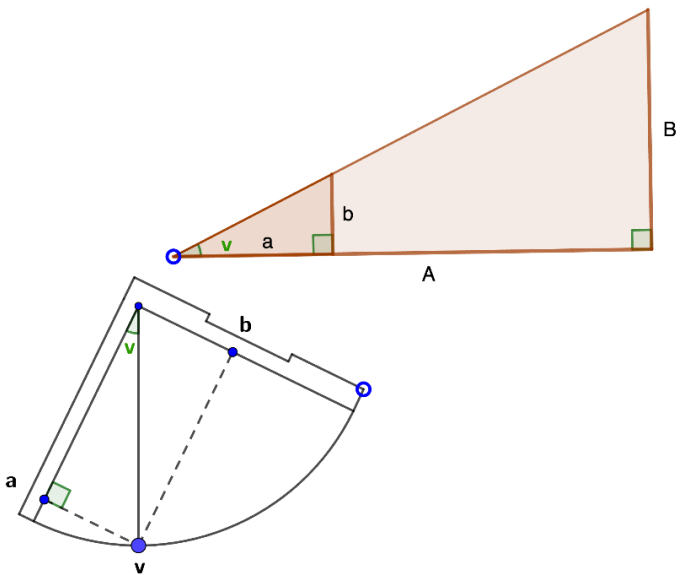
1. Hvorfor formelen i den grå boks også kan bruges med Sinus Kvadranten.
2. Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens.
3. Beregninger i retvinklede trekanter.

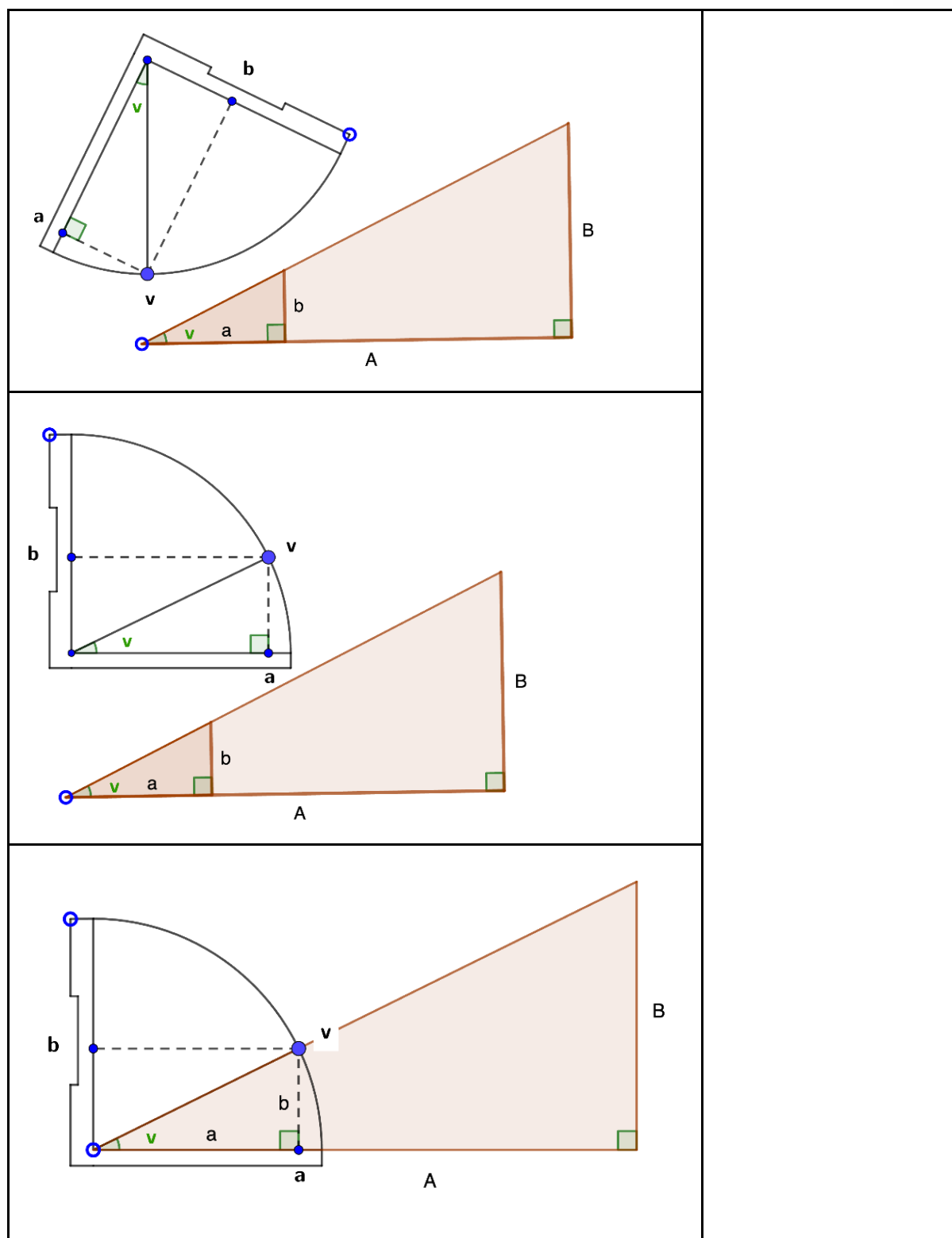


Eksemplet fra brugsvejledningen til bestemmelse af højden af et træ.

1. Hvorfor formelen i den grå boks også kan bruges med Sinus Kvadranten.

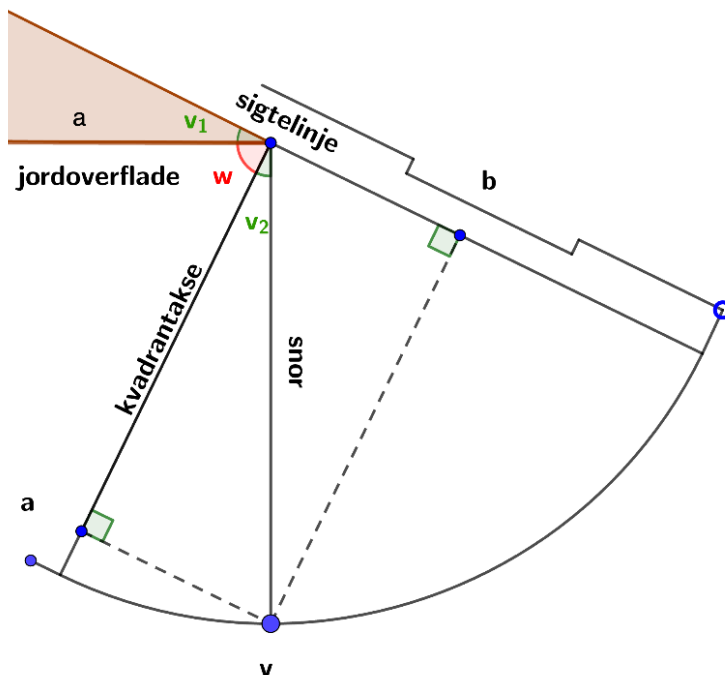
Formlen i den grå boks gælder for ensvinklede trekanter. Så hvis vi kan argumentere for, at trekanten i Sinus Kvadranten er ensvinklet med den store trekant, er vi færdige med argumentet.

Hvad bliver flyttet og hvordan bliver det flyttet, fra billede til billede?	Skriv her
	
	



Ved at spejle, flytte og dreje kan man altså overbevise sig om, at trekanten i Sinus Kvadranten er ensvinklet med den trekant, der dannes, når man måler for eksempel højden af et træ. På næste side er det egentlige matematiske bevis.

Bevis: Vinklen i Sinus Kvadranten v_2 er lig med vinklen v_1 der dannes med jordoverfladen til det man sigter på.



Sinus Kvadranten er ført hen til trekanten og billedet er forstørret, så man bedre kan se vinklerne. Vinklerne har nu også fået hver deres navne.

1. Snoren hænger lodret ned på grund af tyngdekraften og danner derfor en vinkel på 90° med jordoverfladen. (...så man skal altså stå, på et vandret underlag...)

Derfor må der gælde at:

$$w + v_2 = 90^\circ$$

2. Sigtelinjen er vinkelret på kvadrantaksen, for sådan er Sinus Kvadranten konstrueret.

Derfor må der gælde at:

$$v_1 + w = 90^\circ$$

Når begge summer giver 90° må der gælde at:

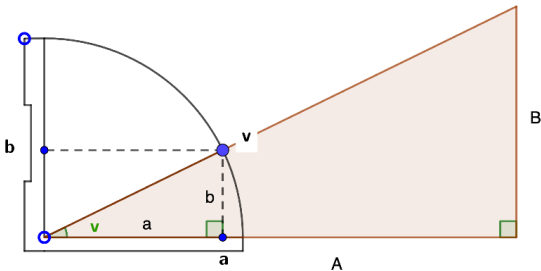
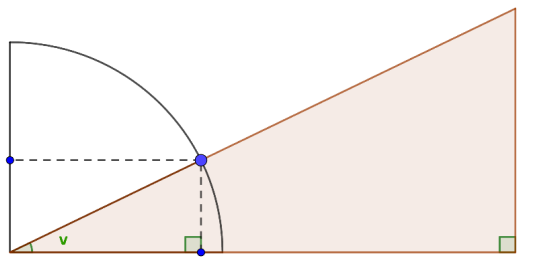
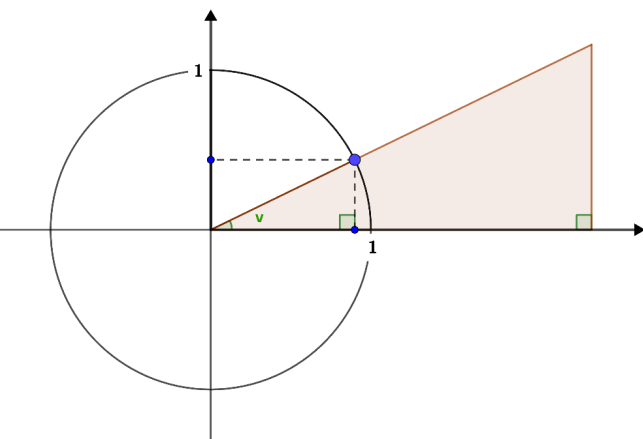
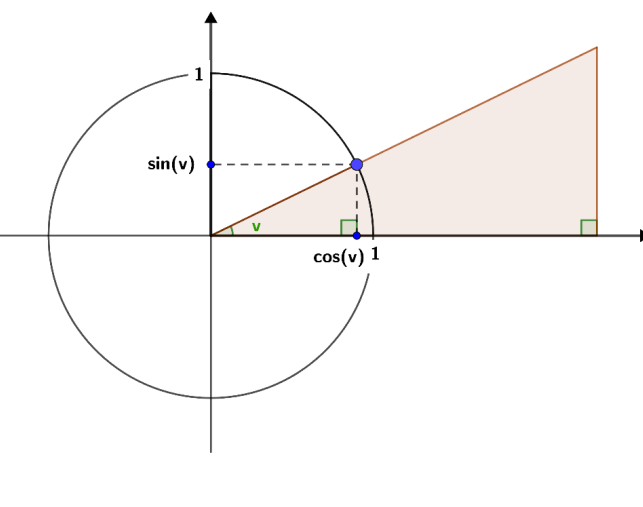
$$v_1 + w = w + v_2$$

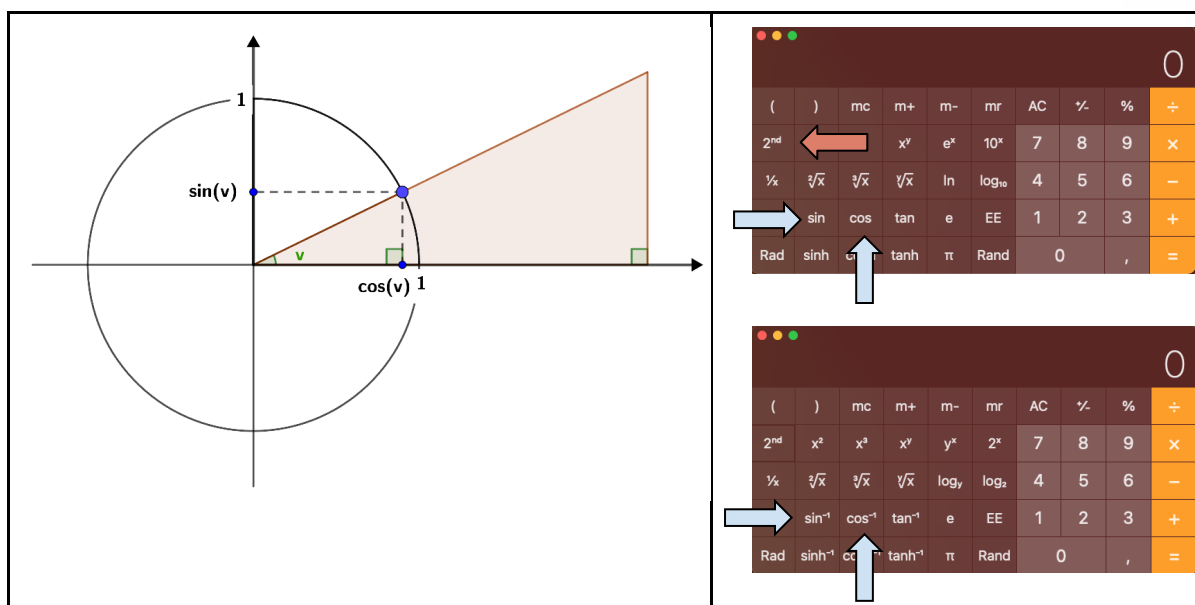
$$v_1 = v_2$$



Spørgsmål: Hvorfor er dette nok til, at man nu kan argumentere for at de to trekanter er ensvinklede?

2. Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens

	Sinus Kvadranten er placeret så man kan se, at de to trekanter er ensvinklede. Bemærk hvor vi tidligere aflæste a og b, når vi havde målt en vinkel v.
	Sinus Kvadranten er nu fjernet. Kun akserne og buen er tilbage. Bogstaverne er også væk, kun vinklen er tilbage.
	Indfører et koordinatsystem med centrum ved vinklen. Buen forlænges, så der fremkommer en cirkel. Vi <i>beslutter</i> at radius på cirklen er 1. <u>Definition på Enhedscirklen:</u> Enhedscirklen er en cirkel med en radius på 1 og centrum i (0,0).
	Hvor vi før aflæste a, ligger nu på x-aksen og vi <i>beslutter</i> at kalde den cosinus til v med udtrykket: $\cos(v)$ Hvor vi før aflæste b, ligger nu på y-aksen og vi <i>beslutter</i> at kalde den for sinus til v med udtrykket: $\sin(v)$ <u>Definition på cos og sin:</u> Beskriv billedet hvor du starter med vinklen v, og forklarer hvor man aflæser $\cos(v)$ og $\sin(v)$.



Fra Sinus Kvadranten til lommeregneren.

Find en lommeregner og se hvad der sker når du taster følgende i rækkefølge:

1. 26
2. cos
3. 2nd
4. cos⁻¹

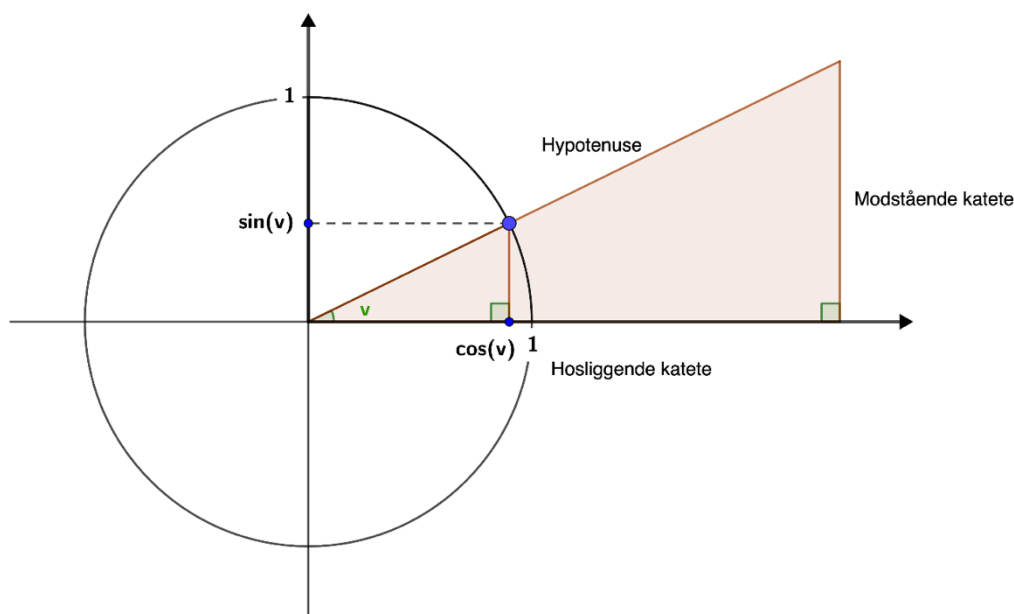
COSINUS

- Taster du en vinkel efterfulgt af cos, får du altså værdien af cos(v), som aflæses på x-aksen.
- Har du værdien for cos(v) (altså værdien på x-aksen), men gerne vil have vinklen, taster du cos⁻¹.

SINUS

- Taster du en vinkel efterfulgt af sin, får du værdien af sin(v) som aflæses på y-aksen.
- Har du værdien for sin(v) (altså værdien på y-aksen), men gerne vil have vinklen, taster du sin⁻¹.

3. Beregninger i retvinklede trekanter



Nu hvor sinus og cosinus er defineret, vil vi gerne kunne bruge dem til beregninger i alle retvinklede trekanter. Det kræver et bevis.

Betragt den store trekant.

Vælger vi én bestemt vinkel i en retvinklet trekant, kan vi navngive siderne i forhold til vinklen, som vist på figuren ovenfor.

- Hvorfor er trekanten inde i enhedscirklen og den store trekant ensvinklede?
- Skaleringsfaktoren k , kan beregnes på følgende måder. Hvorfor kan den det?

$$k = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} \quad k = \frac{\text{Modstående katete}}{\sin(v)} \quad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

- Vi ser nu på to af udtrykkene. Hvad sker der matematisk ved hver pil?

$$k = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

 $\Downarrow$

$$\frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} = \frac{\text{Hypotenuse}}{1} = \text{Hypotenuse}$$

 $\Downarrow$

$$\text{Hosliggende katete} = \text{Hypotenuse} \cdot \cos(v)$$

 $\Downarrow$

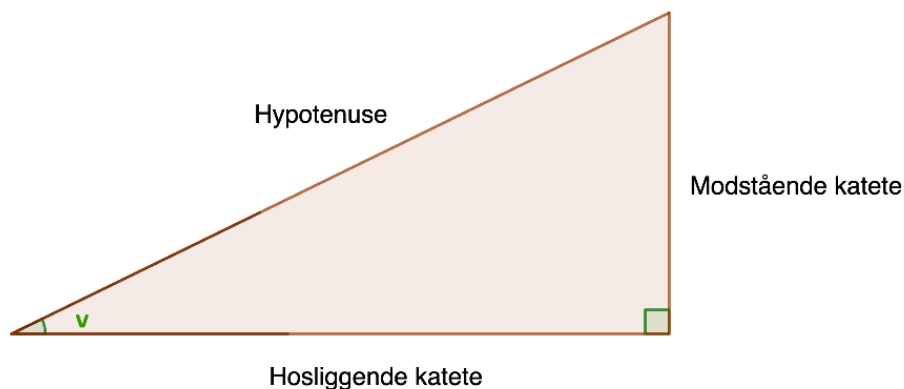
$$\frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos(v)$$

- Vi ser nu på to af de andre udtryk. Forsæt på samme vis som ovenfor.

$$k = \frac{\text{Modstående katete}}{\sin(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

 $\Downarrow$

Beregninger i retvinklede trekanter - overblik

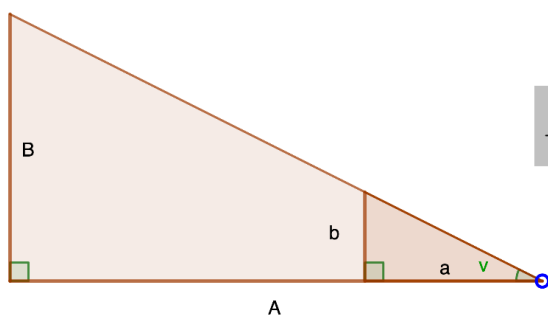


$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \sin(v) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \tan(v) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$

Formlen for tangens er et resultat af, at den er defineret ud fra cosinus og sinus.

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{\frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenuse}}}{\frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Hosliggende katete}} = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$

Nu har vi redskaberne til at bestemme højden af et træ ud fra sigtevinklen, afstanden hen til træet og en lommeregner.



$$B = \frac{b}{a} \cdot A = \tan(v) \cdot A$$