

Geometri – praksis i naturen

Argumenter og anvendelse.



Øvelser

- Ø1 Gå et bevis for vinkelsummen i en trekant.
- Ø2 Trekanter - hvad er nok at vide?
- Ø3 Pythagoras
- Ø4A Skygger (Hvis altså solen skinner)
- Ø4B Snorstråle (Hvis den ikke gør)
- Ø5 Ensvinklede trekanter.
- Ø6 Målinger i Naturen - ensvinklede trekanter
- Ø7 Ud i Svanninge Bjerge.
- Ø8 Jordens radius
- Ø9 Afstanden til horisonten

Introduktion

Spørgsmålet om, hvorvidt matematik er opdaget eller opfundet, er vist ikke endeligt afgjort. Måske er det begge dele?

Med denne samling af øvelser vil du erfare, at med ganske få regler (i matematik kaldet aksiomer), gode ideer og logiske argumenter, kan du komme ret langt med indsigt i hvad matematik er og hvordan matematik kan anvendes.

Du vil få en fornemmelse af hvordan matematik kan blive til og hvordan det vi har erfaret kan anvendes. Du vil blandt andet få indsigt i, hvordan man ved at måle det nære, kan beregne sig frem til noget i det fjerne.

Samlet set kommer øvelserne omkring vinkelsummen i en trekant, de 5 trekantstilfælde, retvinklede trekanter og Pythagoras, ensvinklede trekanter og skaleringsfaktoren, og ikke mindst, cirklen.

Øvelserne kræver ikke brug af anden litteratur og computer, men målebånd, pløkker og snor og måske. En lommeregner.

Ø1 Gå et bevis for vinkelsummen i en trekant

Hvad vi har:

- Vores næse og den retning den peger i, som vinkelmåler.
- Drejer vi én hel gang rundt om os selv, har vi drejet 360° .

Det må betyde, at hvis vi går og vender om og går tilbage derfra vi kom, skal vi dreje næsen $360^\circ/2=180^\circ$. Vores krop er symmetrisk og har fire hjørner; næse, højre arm, nakke og venstre arm. Der må derfor være $360^\circ/4=90^\circ$ mellem hvert hjørne.

Metode:

- Gå kun sidelæns og drej om dig selv, så den ene hånd ikke kommer uden for figuren.

Opgave:

- Benyt den viden som du har fra at gå kvadratet og de værktøjer vi har, til at undersøge hvad summen af vinklerne i en trekant må være.

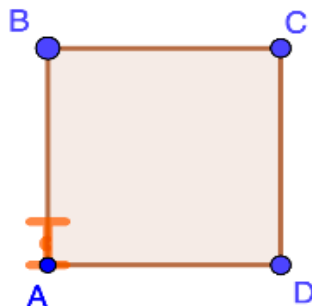
Bemærk! Der er en vigtig forskel fra før! Vi vidste at vinklen i kvadratet er 90° , for det er en definition, men nu kender i ikke størrelserne på vinklerne...

Hint: Vinkelsummen i et kvadrat

Vi efterprøvede næsen som vinkelmåler i et kvadrat dannet af 4 grene. Et kvadrat er defineret som en firkant hvor alle sider er lige lange og alle vinkler er 90° . Summen af vinklerne i et kvadrat må derfor være 360° .

Fremgangsmåde:

- Vi startede med begge ben på den ene af rektanglets sider ved hjørnet A, og noterede os i hvilken retning næsen var rettet imod omgivelserne.
- Så gik vi sidelæns mod hjørnet B.
- Ved B skulle vi videre mod C og må kun gå sidelæns - vi drejede derfor om os selv.
- For at måle vinklen inde i kvadratet skulle vi dreje den vej om os selv, hvor den ene hånd hele tiden blev inde i kvadratet.
- Det gentog vi ved C og ved D..... og ved A.
- Ved hvert hjørne drejede vi om os selv præcis det antal grader som vinklen inden i kvadratet er. Da turen rundt i kvadratet var slut, stod vi med næsen rettet samme vej som da vi startede. Vi har altså undervejs drejet én hel gang rundt om os selv, hvilket vil sige at vi er drejet 360° . Konklusion: vinkelsummen i et kvadrat er 360° .



Ø2 Trekanter - hvad er nok at vide?

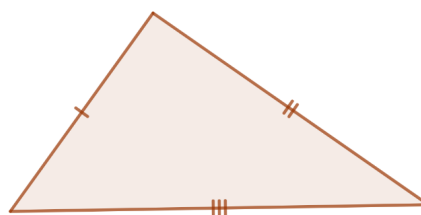
Hvad vi har:

- En trekant består af 3 sider og 3 vinkler, så der er i alt 6 oplysninger om en trekant.
- Summen af vinklerne er 180° .

Vi efterprøvede sammen, at vi kun kunne danne én trekant, hvis vi kender længden på de tre sider. Længden af de 3 sider fastlægger altså de 3 vinkler.

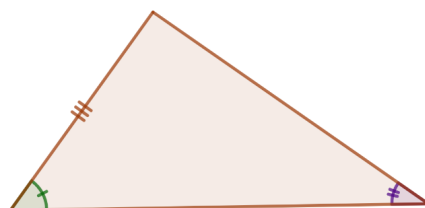
Påstand: alt man behøver at vide for at fastlægge **én** bestemt trekant er 3 oplysninger:

3 sider:

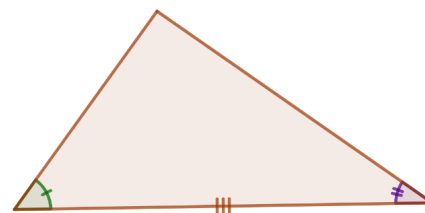


eller

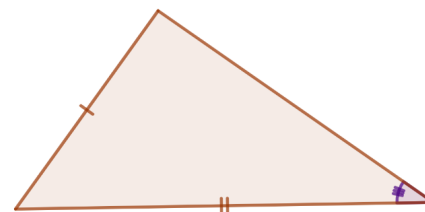
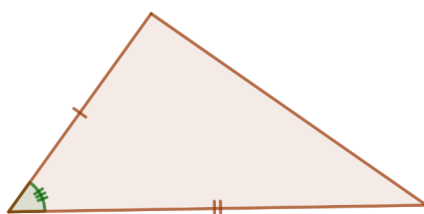
2 vinkler og 1 side:



eller

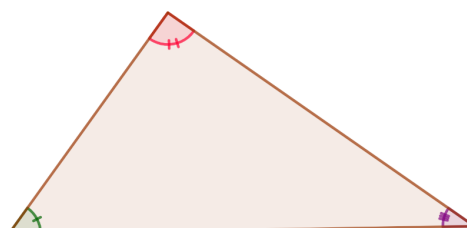


1 vinkel og 2 sider:



Opgave:

- Brug grenene til at undersøge, om påstanden om at tre oplysninger nok til at fastlægge én bestemt trekant, er rigtig.
- Hvorfor er nedenstående tilfælde med 3 oplysninger udeladt?



Ø3 Pythagoras og den retvinklede trekant

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180° .
- Tre pløkker, en rulle garn og en saks.
- Pythagoras læresætning.

Opgave:

- Anvend kun det i har til at danne en retvinklet trekant og argumentér for, at den er retvinklet.

Hint:

- Uden målebånd er i nød til selv at beslutte hvor lang 1 er.

(Spørg vejlederen om hints, hvis i går i stå)

Ø4A Skygger (Hvis altså solen skinner)

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180° .
- Alle genstande kaster en skygge, hvis solen skinner (undtagen i helt specielle tilfælde).
- Et målebånd.

Opgave:

- Find 3 forskellige genstande der står lodret op, og som I kan måle højden af. Undersøg hvordan skyggernes længde afhænger af genstandenes højder.

Genstand 1		Genstand 2		Genstand 3	
Højde 1	Skygge 1	Højde 2	Skygge 2	Højde 3	Skygge 3

- Beregn følgende

$$\frac{\text{Højde 1}}{\text{Højde 2}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{\text{Skygge 1}}{\text{Skygge 2}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{\text{Højde 1}}{\text{Højde 3}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{\text{Skygge 1}}{\text{Skygge 3}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{\text{Højde 3}}{\text{Højde 2}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{\text{Skygge 3}}{\text{Skygge 2}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

- Der dannes en trekant af hver genstand, dens skygge og solens stråler. Argumentér for, at de tre trekanter de tre genstande danner, må være ensvinklede. Tegn en skitse til hjælp, på næste side.

Skitse

- Her er en påstand: Ensvinklede trekanter er skaleret med en skaleringsfaktor.
 - Er det sandt?
 - Hvad er jeres argument?
 - Hvad fortæller skaleringsfaktoren noget om?

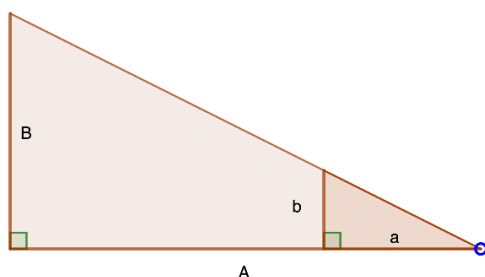
Ø4B Snorstråle (Hvis den ikke gør):

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180° .
- En snor, som danner en ret linje, hvis den holdes stramt nok.
- Et målebånd.
- En pløk.
- Et træ.
- En gren/pind.

Opgave:

- Bind den ene ende af en snor fast på et træ(B). Stram snoren og fastgør den til jorden med pløkken (blå cirkel). I har nu én retvinklet trekant.



- Placer pinden(b) i jorden tre forskellige steder mellem træet og pløkken og beregn følgende:

$$\frac{\text{Højde træ}(B)}{\text{Højde pind}(b_1)} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{A_1}{a_1} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{\text{Højde træ}(B)}{\text{Højde pind}(b_2)} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{A_2}{a_2} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{\text{Højde træ}(B)}{\text{Højde pind}(b_3)} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{A_3}{a_2} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

- Her er en påstand: Ensvinklede trekanter er skaleret med en skaleringsfaktor.
 - Hvorfor er de to trekanter på figuren ensvinklede?
 - Er påstanden sand?
 - Hvad fortæller skaleringsfaktoren noget om?

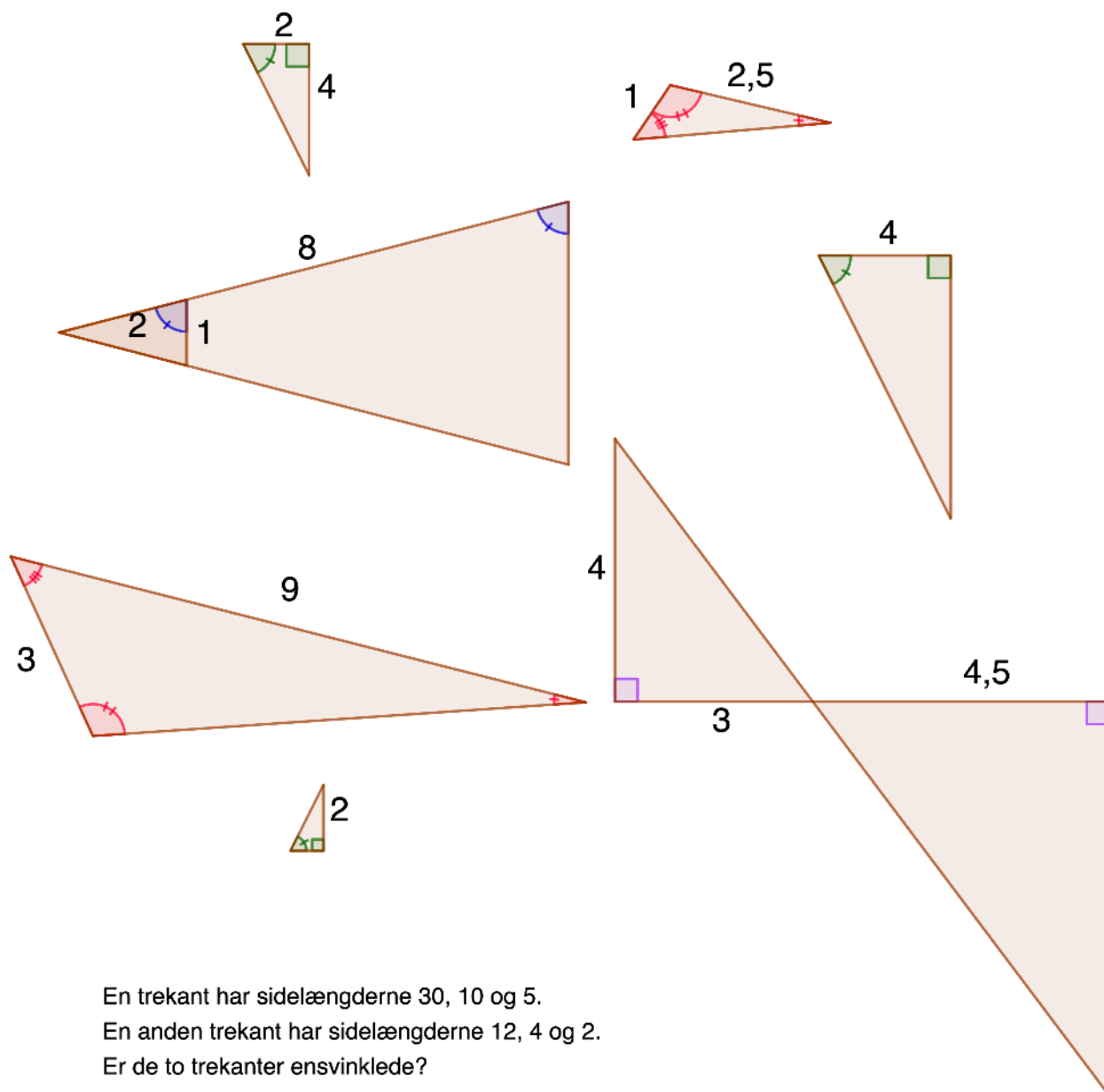
Ø5 Ensvinklede trekanter

Hvad vi har:

- Summen af vinklerne i en trekant er 180° .
- Pythagoras læresætning.
- Ensvinklede trekanter kan skaleres med skaleringsfaktoren.

Opgave

- Hvilke trekanter er ensvinklede og hvorfor? Indsæt de manglende sider, hvor det er muligt og bestem skaleringsfaktoren.



Ø6 Målinger i Naturen med ensvinklede trekanter

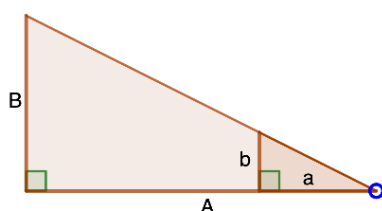
Hvad vi skal bruge nu:

- Ensvinklede trekanter kan skaleres med skaleringsfaktoren.
- En gren eller en person, eller hvad man nu har, som man kan bestemme højden eller længden på.
- Et målebånd og/eller en tommestok.

Skaleringsfaktoren mellem ensvinklede trekanter kan anvendes til at bestemme afstande og højder, vi ikke umiddelbart kan måle. Det kan være højden af et træ.

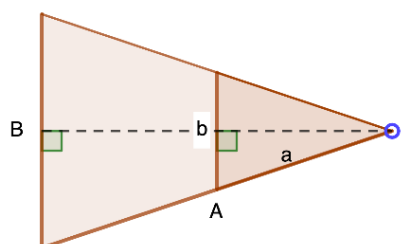
Herunder er der vist fire forskellige geometriske metoder, man kan anvende.

De udnytter skaleringsfaktoren mellem ensvinklede trekanter, til at beregne en side, når man kender de tre andre. Cirklen markerer det sted man står og sigter fra.



Beregning af skaleringsfaktoren k

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = k$$



Bestemmelse af siden B

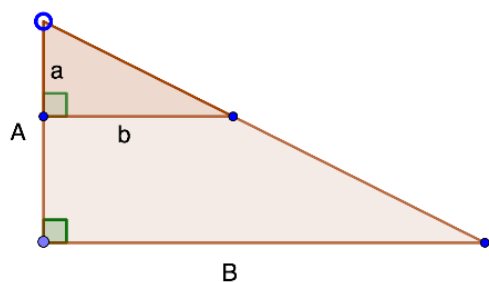
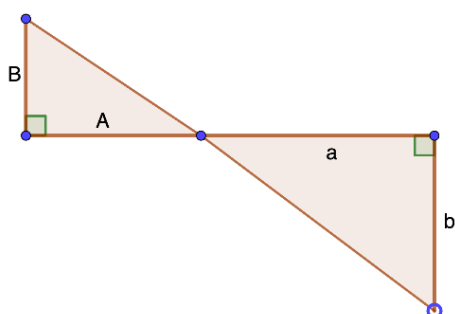
Skriv hvad der sker mellem hvert udtryk:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} \Leftrightarrow$$

$$\frac{A}{a} \cdot b = B \Leftrightarrow$$

$$\frac{A \cdot b}{a} = B \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$



Opgave:

- Diskuter hvordan i kan anvende de to øverste metoder til at bestemme højden af træet på Naturlegepladsen og bestem den. Tegn en skitse af situationen hvor metoden, målingerne og beregningerne fremgår herunder.

Skitse:

Ø7 Ud i Svanninge Bjerge

- Der er tre poster i bjergene som i kan finde i Woop-appen (GeoBio Trigonometri).
- I skal løse mindst én opgave ved 2 af posterne.
- Løsningerne skal dokumenteres med billeder og skitser, hvoraf de målte og beregnede værdier fremgår.
- Brug to forskellige metoder (hvis det er muligt), til at løse hver opgave og diskutér fordele og ulemper ved de to metoder.
- Der er "formelsamling" på næste side til inspiration – tegn gerne på den.
- HUSK - brug jeres opfindsomhed til hvad der kan hjælpe jer til opmålingerne OG efterlad området pænere end da i ankom.

Åkande Sø - en gangbro?

1. (*Den svære*) Hvor langt der er fra bredden ud til øen i søen.
2. (*mindre svær*) Hvor langt der er fra bredden ud til øen i søen, hvis øen er 30 m bred.
3. Hvor høje er træerne midt på øen, hvis der er 40 m fra bredden ud til dem?



Gammelt jordfaldshul?

Tynde istidsaflejringer af ler og sand ovenpå kalk kan skabe et jordfaldshul, når vand siver ned og opløser kalken.

1. Bestem diameteren af hullet i jorden.
(Bemærk at der er flere træer, der står på en lige linje på den ene side.)
2. Kan dybden af hullet bestemmes?

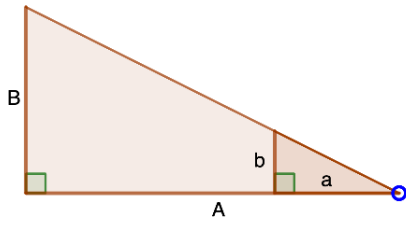


Lerbjerg - en issøbakke:

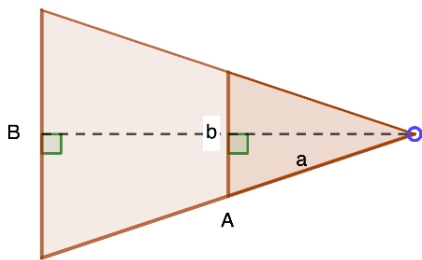
10 km mod vest kan man se det lavvandede område mellem Illumø og Vigø.

1. Hvor langt er der mellem de to øer?
2. Mod syd står der Graner, der skiller sig ud i landskabet - hvor højt er det højeste?

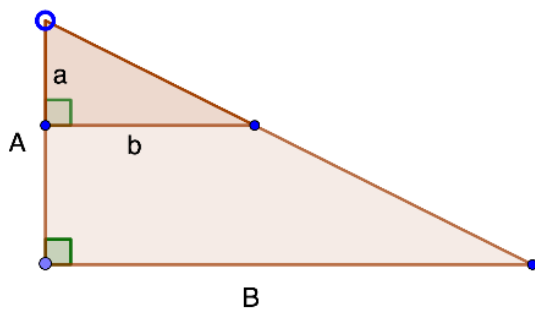
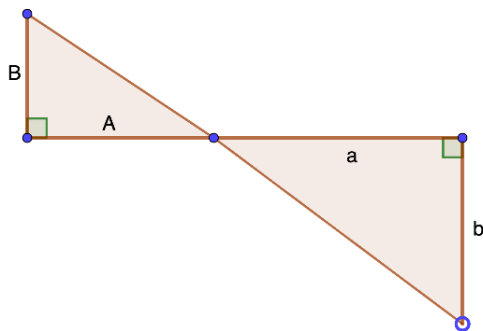




$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$



$$\frac{b}{a} \cdot A = B$$



Ø8 Jordens radius

Hvad vi har:

- Vores viden om retvinklede trekanter, cirkler og parallelle linjer.
- Vi antager at Jorden er rund.

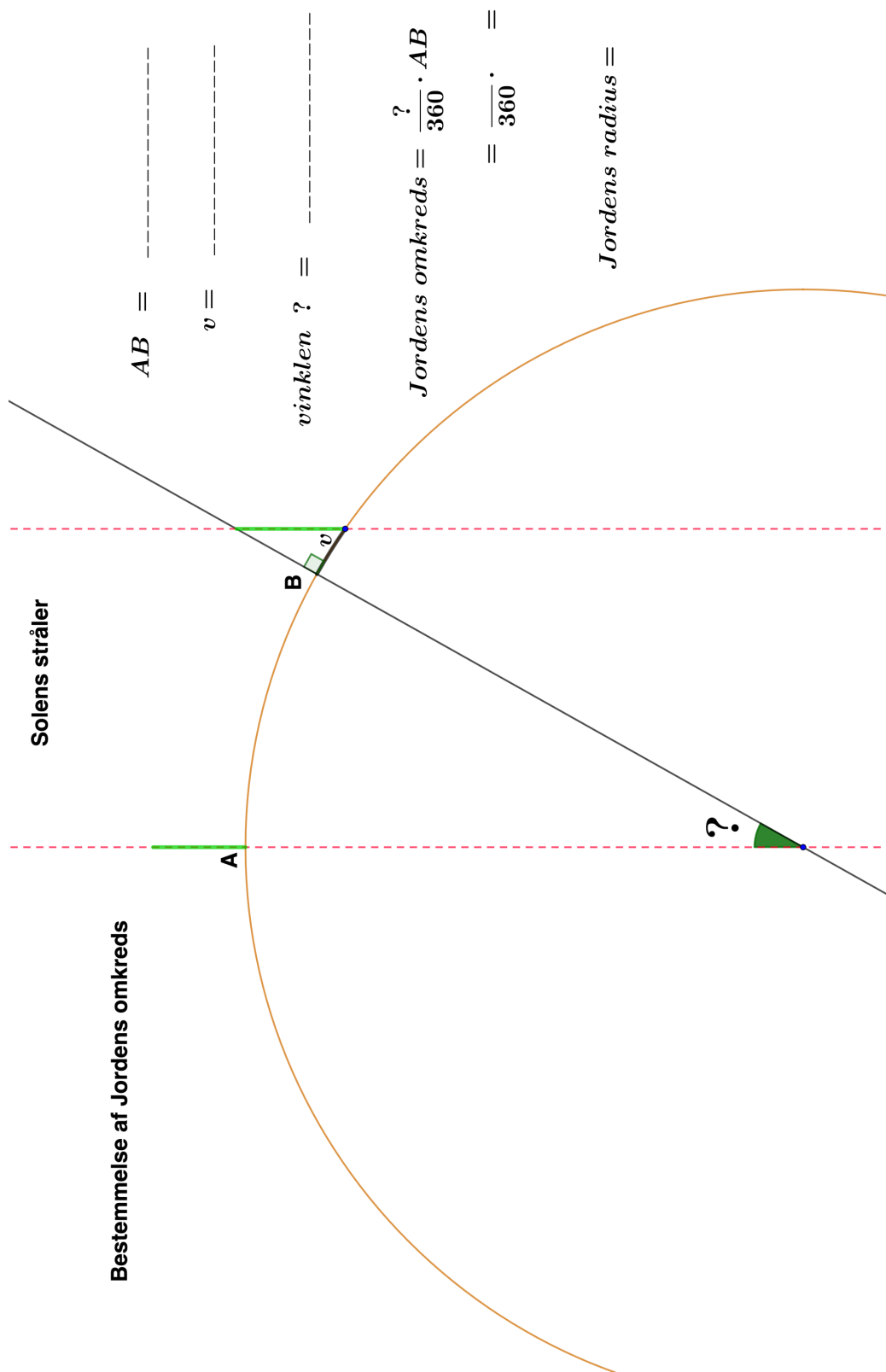
Opgave:

- Bestemme Jordens omkreds ved brug af solens indstrålingsvinkel og afstanden til det sted på jorden, hvor solen står i Zenit akkurat nu.

Fremgangsmåde:

En matematisk model af det du arbejder med, gør det oftere lettere at løse opgaven. En model er med til at skabe overblik og gør det muligt at se det hele udefra. En model er også med til at forsimple problemet og gør det lettere at gennemskue de matematiske sammenhænge. På den næste side er der en model over solens stråler der falder ind på Jorden. Se på modellen efter at have læst hvert punkt, så du kan holde dig orienteret.

1. Afstanden mellem Jorden og Solen er 20.000 gang større end Jordens diameter. Det betyder at vi kan betragte solens stråler som parallelle.
2. Ved A står solen lige nu i Zenit – Spørg din lærer hvor og skriv det på modellen.
3. Du står ved B – find afstanden AB.
4. Bestem vinklen v med din mobiltelefon – hint: den grønne linje kaster ikke nogen skygge.
5. Anvend din viden om retvinklede trekanter og parallelle linjer, til at bestemme vinklen ?
6. Hvor stor en brøkdelt udgør vinklen ? af at skulle dreje en hel gang om sig selv?
7. Bestem Jordens omkreds.
8. Bestem Jordens radius.



Ø9 Afstanden til horisonten

Hvad vi har:

- Vores viden om retvinklede trekanter, cirkler og tangenter.
- Vi antager at Jorden er rund og kender dens radius.

Opgave:

- Hvor langt er der til horisonten? Afhænger det af hvor højt et punkt du ser fra? Ville det samme gælde hvis jorden er flad?

Fremgangsmåde:

Vi skal igen bruge en matematisk model, men denne gang skal du selv udforme den, med følgende instrukser:

1. Tegn en cirkel, med centrum.
2. Tegn en tangent til cirklen.
3. Tegn en ret linje fra cirkelens centrum til punktet hvor tangenten rører cirklen.
4. Tegn en ret linje fra cirkelens centrum til et andet sted på tangenten til cirklen.
5. Du har nu tegnet en retvinklet trekant, hvor er den rette vinkel?
6. Sammenlign din model med dine omgivelser og navngiv elementerne i din model så det passer.
7. Hvor langt er der fra dig til horisonten?

Skitse:

