

Overskrift	CO_2 -indhold i klasselokale
Klassetrin	3g (Matematik A)
Fag	Matematik - differentialligninger Andre muligheder: - Man kan evt. lave modeller med klasser der ikke har lært differentialligninger. Man kan så lave regression på data og snakke om udviklingen i CO_2-indhold. Selv om man ikke har lært om differentialligninger, kan man godt snakke om de forskellige faktorer der har indflydelse på CO_2-indholdet. - Man kan også vælge at måle på andet end CO_2-indholdet. - Man kan eventuelt inddrage biologi i forbindelse med respiration. - Man kan eventuelt anvende materialet efter eleverne har gennemarbejdet forberedelsesmaterialet stx A 2014, hvor man introduceres til koblede differentialligninger.
Kernestof og fagbegreber	Det overordnede emne er differentialligninger. Man kan både opstille nogle der kan løses analytisk og nogle der må løses numerisk. Forløbet er tænkt som supplement til lærebogens kapitel om differentialligninger. F.eks. kan man inddrage Eulers eller Runge-Kutta metode til at løse differentialligninger numerisk. Mange lærebøger til gymnasiet inddrager numeriske løsninger i kapitlet om differentialligninger. F.eks. indeholder Lærebog i matematik A3 stx systemet et fint afsnit om numerisk løsning af differentialligninger.
Lektionsplan, inklusive tidsforbrug	Alt efter hvor lang tid man vil bruge på forløbet, kan man vælge til og fra i forløbet. Hvis man vil spare tid, kan man f.eks. vælge at bruge vores data. Man kan også anvende materialet i forbindelse med SRP.
Litteratur, herunder forslag til supplerende litteratur	Se det vedlagte dokument.
Undervisningsmaterialet	En liste over forskellige modeller for CO_2-koncentrationens forløb. - differentialligninger med forklaringer Excel-ark med de enkelte modeller for CO_2-koncentrationen.

	- I Excel-arkene er vist hvordan modellerne kan løses numerisk med Eulers metode. (se også "Modeller løst i Excel")
Data	Vi har brugt en PocketLab Air til at måle CO_2-indholdet. https://www.thepocketlab.com/store/pocketlab-air Vi har vedlagt 5 datasæt med målinger på forskellige situationer. I de enkelte datasæt er beskrevet, under hvilke forhold dataene er taget.
Forslag til ekskursioner	SDU: Martin Winther-Gaasvig, mwg@iti.sdu.dk Nyt OUH: Allan Hylleberg Hansen, ahh@rsyd.dk
Downloads	Oversigt Forløbsplan Modeller for CO_2-koncentration Litteraturliste Excel-fil med CO_2-modellerne Excel-fil med data Samlet i en fil

Forløbsplan

Modul - 95 minutter	Indhold	Supplerende materiale
1	- Læreren præsenterer eleverne for forløbet. - Video afspilles. - Excel filer med måledata. Her skal eleverne prøve at modellere udvalgte stykker på kurverne (efter de modeller de kender fra undervisningen). - Nu skal de komme med forslag til, hvad der sker i de forskellige situationer (klasserumsundervisning/pause/åbent vindue/ dør åbnes... mm.) - Læreren har svaret. Der diskuteres på klassen.	https://www.youtube.com/watch?v=csz0KjoWLA0
2	- Eleverne introduceres til koblete differentialligninger gennem forberedelsesmaterialet fra 2014. En god mulighed for træning af selvstudie i forbindelse med kommende skriftlige eksamen.	
3	- Eleverne arbejder videre med forberedelsesmaterialet. To moduler er nok, da den ene halvdel af forberedelsesmaterialet omhandler differentialligninger af 2. grad.	
4-6	- Nu skal der arbejdes med numeriske metoder til løsning af koblete differentialligninger. - Man kan med fordel anvende afsnittet 'numeriske metoder' fra 'Lærebog i matematik A3 stx' fra systime. - Der kan lægges vægt på Eulers metode, da den er nemmest at forklare principperne bag. - De tilhørende opgaver fra bogen løses. - Programmet fra modul 4 fortsættes. - Nu introduceres kompartmentmodeller (også fra A3 stx), da et klasserum med tilstødende lokaler og udluftning kan ses som kompartments. - Som lærer gennemgår man nogen af eksemplerne fra bogen. - Løs de tilhørende opgaver.	

7-8	- Sammen med eleverne overvejer man nu, hvilke kompartments og flows, der er relevant for problemstillingen om kuldioxid-indholdet i et klasserum. - Der arbejdes med at opstille differentiallyigninger, som beskriver flowet mellem de indgående kompartments. - Ved hjælp af Eulers metode bestemmes de første approksimative funktionsværdier for modellerne. - Man kan prøve at udforme regneark, der kan lave arbejdet for en.	I materialet kan man finde fire modeller, hvor der tages højde for ting som mekanisk udluftning og tilstødende lokaler. I materialet findes regneark, der løser modellerne ved hjælp af Eulers metode.
9	- Afsluttende diskussion. - Kan man nemt beskrive de rigtige data fra klasserummet ved hjælp af de koblede differentiallyigninger? - Kan man eventuelt finde sine modeller på udsnit af de målte data? - Man kan evt. bruge "Exhausto CO_2 calculator" til at vise en realistisk udvikling i af CO_2-koncentrationen. - Hvorfor opfører virkeligheden sig ikke som modellerne?	http://xselect.exhausto.dk/selector/LearningRoomCO2.jsp?lang=DK

Modeller for CO_2 -koncentration i et lokale

Man kan stille mange forskellige modeller op for CO_2 -koncentrationen i et lokale.

Den simpleste indeholder kun CO_2 -produktion fra personerne i lokalet og udluftning/ventilation. Hertil kan så tilføjes forskellige ting. Det kan f.eks. være et tilstødende rum/gang eller man kan stille på hvor meget ventilatoren kører.

Udfordringer med modellerne:

De modeller vi har opstillet og gennemgår nedenfor, passer godt med data for et lokale, hvor man ikke ændrer på "opsætningen" undervejs. Dvs. man må f.eks. ikke midtvejs i målingen begynde at lufte ud eller lade alle elever forlade lokalet.

Hvis man vil inddrage det i løsninger i Excel, skal man ændre differentialligningerne på det tidspunkt, hvor man ændrer forholdene.

I Exhaustos CO_2 -beregner kan man se, hvordan CO_2 -koncentration ændrer sig i et lokale, når man skiftevis har undervisning og pause. (se litteraturlisten)

Parametre mm.

Inden vi gennemgår de forskellige modeller, kommer her først en gennemgang af de parametre der går igen i alle/de fleste modeller.

N_1, N_2, N_3 er CO_2 -koncentrationerne (L/m^3) i hhv. lokalet, udendørs/udluftningsluft og i et evt. tilstødende lokale/gang.

N_2 (CO_2 -koncentrationen udendørs) antages konstant i alle modeller, dvs. $\frac{dN_2}{dt} = 0$

V_1, V_3 (m^3) er rumfanget af lokalet og et evt. tilstødende lokale/gang.

k_2 er produktionsraten af CO_2 (L/h) fra personerne i rummet.

- For en 16-18-årig: ¹ $0,34 \frac{L}{min} = 20,4 \frac{L}{h}$
- For en voksen: $0,47 \frac{L}{min} = 28,2 \frac{L}{h}$
- En klasse med 25 elever og en lærer producerer derfor ca. $540 \frac{L}{h}$

Vi har regnet med en CO_2 -koncentration udendørs på 400 ppm.

I vores beregninger har vi brugt, at vores undervisningslokaler er ca. $8 \times 8 \times 2,8 \text{ m}$.

- Dvs. $V_1 = 179 \text{ m}^3$

Det er ikke praktisk at regne CO_2 -koncentrationen i ppm.

Derfor omregner vi til $\frac{L \text{ } CO_2}{m^3 \text{ luft}}$, dvs. i praksis bare $\frac{L}{m^3}$

$$400 \text{ ppm} = \frac{400 \text{ L } CO_2}{1000000 \text{ L luft}} = 0,0004 \frac{L}{\frac{1}{1000} m^3} = 0,4 \frac{L}{m^3}$$

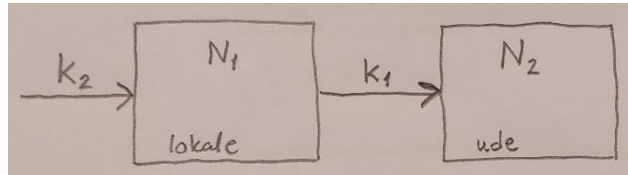
¹ Int. J. Environ. Res. Public Health 2017, 14, 145, Review and Extension of CO_2 -Based Methods to Determine Ventilation Rates with Application to School Classrooms

Modeller

Model 1

Model 1 er den simpleste model. Her indgår kun luftudskiftning ved enten ventilation eller udluftning. Raten hvormed luften udskiftes sættes til at være proportional med forskellen mellem CO_2 -koncentrationerne ude og inde.

Kompartiment-model:



Differentialligninger:

$$V_1 \cdot \frac{dN_1}{dt} = k_1 \cdot (N_2 - N_1) + k_2$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$

k_1 : luftudskiftningsraten (m^3/h) enten ved ventilation eller udluftning

Model 2

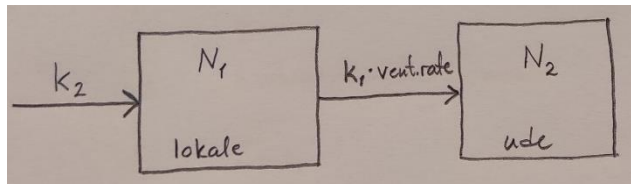
I model 2 kan man stille på hvor meget ventilationssystemet er tændt (0-100%)

Hvis CO_2 -koncentrationen inde er mindre end A, er ventilationen slukket.

Når CO_2 -koncentrationen ligger mellem A og B, vokser ventilationsraten lineært fra 0-100%. (se udregning nedenfor)

Hvis CO_2 -koncentrationen inde er større end B, er ventilationen på 100%

Kompartiment-model:

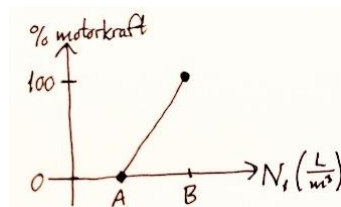


Differential-ligninger:

$$V_1 \cdot \frac{dN_1}{dt} = k_1 \cdot \text{HVIS} \left(N_1 < A; 0; \text{HVIS} \left(A \leq N_1 \leq B; \frac{N_1 - A}{B - A}; 1 \right) \right) \cdot (N_2 - N_1) + k_2$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$

k_1 : luftudskiftningsraten (m^3/h) ved ventilation

Ventilationsraten:

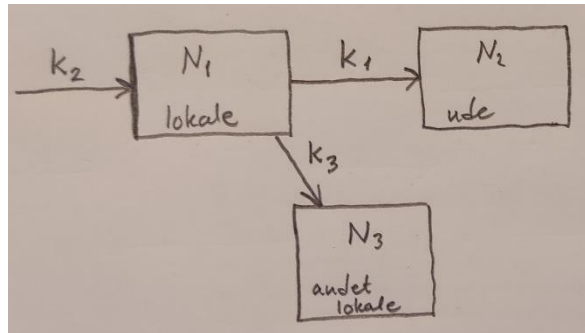


$$a = \frac{100\% - 0\%}{B - A} = \frac{1}{B - A}$$
$$b = 0\% - \frac{1}{B - A} \cdot A$$
$$y = \frac{1}{B - A} \cdot N_1 - \frac{1}{B - A} \cdot A = \frac{N_1 - A}{B - A}$$

Model 3

Model 3 inddrager et tilstødende lokale/gang udover luftudskiftning som i model 1. Raten for luftudskiftningen mellem de to lokaler sættes til at være proportional med forskellen mellem CO_2 -koncentrationerne.

Kompartiment-model:



Differentialligninger:

$$V_1 \cdot \frac{dN_1}{dt} = k_1 \cdot (N_2 - N_1) + k_2 + k_3 \cdot (N_3 - N_1)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$
$$V_3 \cdot \frac{dN_3}{dt} = k_3 \cdot (N_1 - N_3)$$

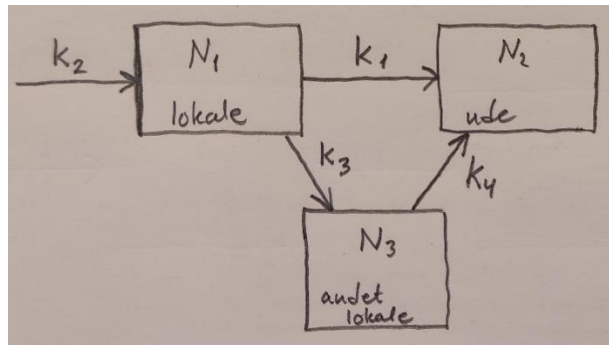
k_1 : luftudskiftningsraten i lokale (m^3/h) enten ved ventilation eller udluftning

k_3 : luftudskiftningsraten til tilstødende lokale/gang (m^3/h) ved åben dør

Model 4

Model 4 er en udvidelse af model 3, hvor gangen også har udluftning. Alle raterne for luftudskiftning sættes til at være proportional med forskellen mellem CO_2 -koncentrationerne.

Kompartiment-model:



Differentialligninger:

$$V_1 \cdot \frac{dN_1}{dt} = k_1 \cdot (N_2 - N_1) + k_2 + k_3 \cdot (N_3 - N_1)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$
$$V_3 \cdot \frac{dN_3}{dt} = k_3 \cdot (N_1 - N_3) + k_4 \cdot (N_2 - N_3)$$

k_1 : luftudskiftningsraten i lokale (m^3/h) enten ved ventilation eller udluftning

k_3 : luftudskiftningsraten til tilstødende lokale/gang (m^3/h) ved åben dør

k_4 : luftudskiftningsraten i tilstødende lokale/gang (m^3/h) enten ved ventilation eller udluftning

Løsning af modellerne

Det er kun model 1, der kan løses analytisk.

De andre modeller må løses numerisk.

Model 1

Først løses $\frac{dN_2}{dt} = 0$ $N_2(t) = \text{konstant}$, kaldes N_2 fremadrettet

Så løses $V_1 \cdot \frac{dN_1}{dt} = k_1 \cdot (N_2 - N_1) + k_2$

Først omskrives til $N_1' = \left(\frac{k_1}{V_1} \cdot N_2 + \frac{k_2}{V_1}\right) - \frac{k_1}{V_1} \cdot N_1$

Ved hjælp af Panserformlen eller lignende fås:

$$N_1(t) = \frac{\frac{k_1 \cdot N_2 + k_2}{V_1}}{\frac{k_1}{V_1}} + c \cdot e^{-\frac{k_1}{V_1} \cdot t} = \frac{k_1 \cdot N_2 + k_2}{k_1} + c \cdot e^{-\frac{k_1}{V_1} \cdot t}$$

Konstanten c bestemmes: $N_1(0) \equiv N_{1,0} = \frac{k_1 \cdot N_2 + k_2}{k_1} + c$

Dvs. $c = N_{1,0} - \frac{k_1 \cdot N_2 + k_2}{k_1}$

Løsningen er derfor: $N_1(t) = \frac{k_1 \cdot N_2 + k_2}{k_1} + \left(N_{1,0} - \frac{k_1 \cdot N_2 + k_2}{k_1}\right) \cdot e^{-\frac{k_1}{V_1} \cdot t}$

Numerisk løsning af modellerne

Numerisk løsning af differentialligninger kan gøres på flere måder.

En mulighed er at bruge et modelleringsprogram, f.eks. Modellus.

Modellus bruger Runge-Kutta af 4. orden.

Programmet kan f.eks. downloades her: <https://intra.fr-gym.dk/downloads/Modellus.html>

Vi har valgt at bruge Excel og Eulers metode til at løse de forskellige modeller.

Vores Excel-ark er vedlagt.

Hvis man i et Excel-ark ønsker at se hvilke formler, der står i de forskellige felter, kan man gå ind i menuen "Formler" og vælge "Vis formler".

Nedenfor kan man se, hvordan det ser ud før og efter man har valgt "Vis formler".

I felterne D2-D8 kan man se modellerne skrevet som henholdsvis differentialligninger og som de bruges i Eulers metode.

Hvis man ønsker at ændre de forskellige værdier i modellen, kan det gøres i de gule felter.

Hvis man ønsker at ændre modellen, skal man skrive de nye differentialligninger i kolonnerne E-G.

"Vis formler" i Excel

"Almindelig" visning:

	A	B	C	D	E	F
1	Model 1					
2						
3	$\Delta t =$	0,01	h	$N1' = (k1*(N2-N1)+k2)/V1$		
4	$V1 =$	179	m ³	$N2' = 0$		
5	$k1 =$	1000	m ³ /h			
6	$k2 =$	540	L/h	$\Delta N1 = (k1*(N2-N1)+k2)/V1 * \Delta t$		
7				$\Delta N2 = 0$		
8						
9						
10	Tid	N1	N2		$\Delta N1$	$\Delta N2$
11	h	L/m ³	L/m ³		L/m ³ /h	L/m ³ /h
12	0,000	0,400	0,400		0,030	0,000
13	0,010	0,430	0,400		0,028	0,000
14	0,020	0,459	0,400		0,027	0,000
15	0,030	0,486	0,400		0,025	0,000
16	0,040	0,511	0,400		0,024	0,000

"Vis formler":

	A	B	C	D	E	F
1	Model 1					
2						
3	$\Delta t =$	0,01	h	$N1' = (k1*(N2-N1)+k2)/V1$		
4	$V1 =$	179	m ³	$N2' = 0$		
5	$k1 =$	1000	m ³ /h			
6	$k2 =$	540	L/h	$\Delta N1 = (k1*(N2-N1)+k2)/V1 * \Delta t$		
7				$\Delta N2 = 0$		
8						
9						
10	Tid	N1	N2		$\Delta N1$	$\Delta N2$
11	h	L/m ³	L/m ³		L/m ³ /h	L/m ³ /h
12	0	0,4	0,4		$=(\$B\$5*(C12-B12)+\$B\$6)/\$B\$4*\$B\3	=0
13	$=A12+\$B\3	$=B12+E12$	$=C12+F12$		$=(\$B\$5*(C13-B13)+\$B\$6)/\$B\$4*\$B\3	=0
14	$=A13+\$B\3	$=B13+E13$	$=C13+F13$		$=(\$B\$5*(C14-B14)+\$B\$6)/\$B\$4*\$B\3	=0
15	$=A14+\$B\3	$=B14+E14$	$=C14+F14$		$=(\$B\$5*(C15-B15)+\$B\$6)/\$B\$4*\$B\3	=0
16	$=A15+\$B\3	$=B15+E15$	$=C15+F15$		$=(\$B\$5*(C16-B16)+\$B\$6)/\$B\$4*\$B\3	=0

Litteraturliste

Differentialligninger:

Mange lærebøger til gymnasiet inddrager numeriske løsninger i kapitlet om differentialligninger.

Ebbesen & Brydensholt. *Lærebog i matematik A3 stx*. Systime (2019)

- har et fint afsnit om numerisk løsning af differentialligninger.

Undervisningsministeriet. *Forberedelsesmaterialet stx Mat A* (2014)

- giver en introduktion til koblede differentialligninger

Videnskabelige artikler om indeklima og matematiske modeller:

Batterman, Stuart. *Review and Extension of CO₂-Based Methods to Determine Ventilation Rates with Application to School Classrooms*. Int. J. Environ. Res. Public Health 2017, 14, 145.

- <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/28165398/>

Teleszewski, T. & Gładyszewska-Fiedoruk, K. *The concentration of carbon dioxide in conference rooms: a simplified model and experimental verification*. International Journal of Environmental Science and Technology (2019) 16:8031–8040.

- <https://link.springer.com/article/10.1007/s13762-019-02412-5>

Laska, M. & Dudkiewicz, E. *Research of CO₂ concentration in naturally ventilated lecture room*. E3S Web of Conferences 22, 00099 (2017)

- https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/abs/2017/10/e3sconf_asee2017_00099/e3sconf_asee2017_00099.html

CO₂-beregnerne:

EXHAUSTO CO₂ calculator

- <http://xselect.exhausto.dk/selector/LearningRoomCO2.jsp?lang=DK>

The National Institute of Standards and Technology (NIST)

- <https://pages.nist.gov/CONTAM-apps/webapps/CO2Tool/#/>

Gov.uk, CO₂ concentration build up calculator

- <https://www.gov.uk/government/publications/classvent-and-classcool-school-ventilation-design-tool>

Om CO_2 -koncentrationens påvirkning af elevernes indlæring:

Video, der præsenterer problemstillingen med kuldioxidforurening i klasselokalet

- <https://www.youtube.com/watch?v=cszOKjoWLA0>

Satish, U. m.fl. *Is CO₂ an indoor pollutant? Direct effects of low-to-moderate CO₂ concentrations on human decision-making performance*. Environ Health Perspect 120:1671–1677 (2012)

- <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/23008272/>

Velux, *Grøn genstart*, Healthy Homes Barometer 2020

- <https://presse.velux.dk/download/991236/hhb-main-report-2020-dk-enkelt.pdf>

Fraunhofer-Institut für Bauphysik IBP, *Impact of the indoor environment on learning in schools in Europe*, 2015

- https://www.ibp.fraunhofer.de/content/dam/ibp/en/documents/Press-releases/Study%20report_Impact%20of%20the%20indoor%20environment%20on%20learning%20in%20schools%20in%20Europe.pdf

Om indeklima generelt:

Kasper Solberg, Vestfyns Gymnasium har udarbejdet et materiale til Astra's masseeksperiment 2021 (gennemgår mange af de parametre, der påvirker indeklimaet - deriblandt CO_2 -indholdet)

- https://masseeksperiment.dk/wp-content/uploads/2021/10/MX_indeklima-forlob_2021.pdf

Astra, Masseeksperimentet 2021: Indeklima

- <https://masseeksperiment.dk/>

Boliga, *Tema om indeklima*

- <https://www.bolius.dk/indeklima>

DTU Byg, *Luftkvalitet i danske skoler*, Analyse nr. 1, 2019

- <https://www.byg.dtu.dk/forskning/byganalyse/dtu-byganalyse-nr-1>

Realdania, *Projekt om skolernes indeklima*

- <https://realdania.dk/projekter/skolernes-indeklima>

JyllandsPosten, *Test: Så meget betyder udluftning for dit indeklima*, 16. juni 2016

- <https://jyllands-posten.dk/bolig/tips/ECE7441367/test-saa-meget-betyder-udluftning-for-dit-indeklima/>