Trigonometri – i naturen

Fra praksis til teori

Øvelser

Ø7 Matematikken bag Kvadranten.
Ø8 Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens.
Ø9 Bevis for beregninger i retvinklede trekanter.

Introduktion

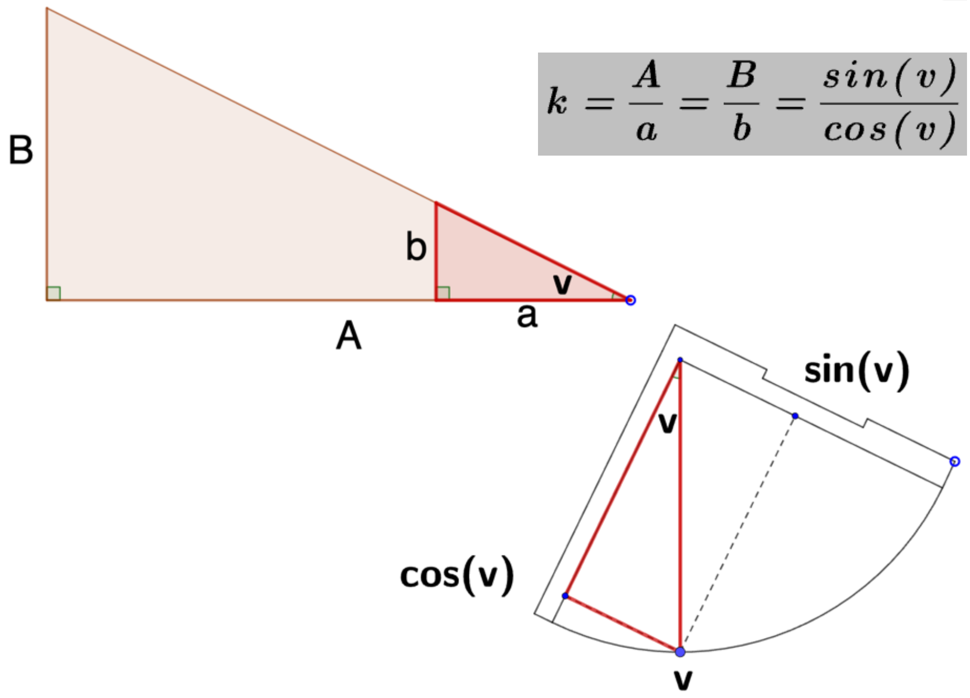
De trigonometriske funktioner, cosinus, sinus og tangens bliver anvendt inden for fantastisk mange fagområder. De er defineret helt matematisk stringent, men også en smule abstrakt.

Med de praktiske øvelser med kvadranten har du set hvordan ligedannede trekanter har sidelængder med samme forhold. Eller anderledes formuleret, hvis to trekanter er ligedannede findes der et tal som kan ganges på længderne af den ene trekant, så den bliver magen til den anden.

Da du brugte Kvadranten til at bestemme højden af et træ, opstod der en trekant på kvadranten. der er ligedannet med den store trekant du selv var en del af.

Nedenfor er gengivet en figur, hvor B angiver højden af træet, sammen med formlen for skaleringsfaktoren.

$$k = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{sin(v)}{cos(v)}$$



Dette materiale indeholder tre øvelser, der ved brug af illustrationer vil bevise følgende:

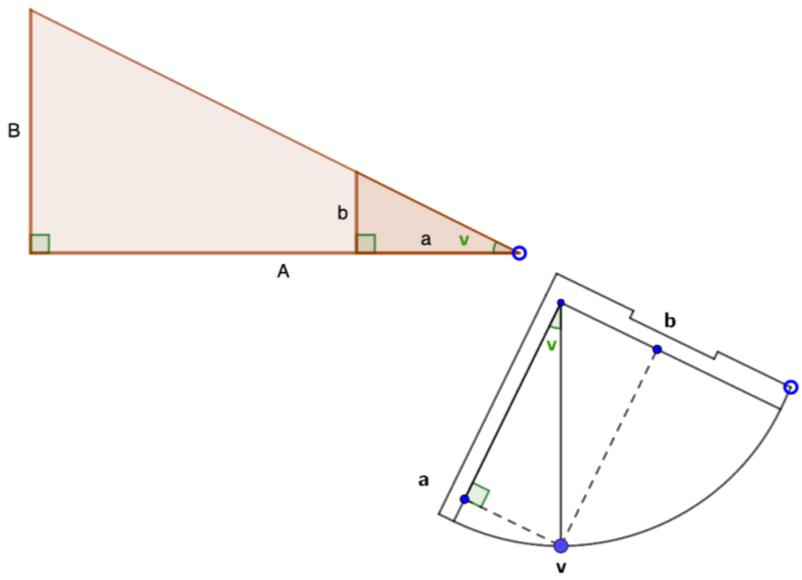
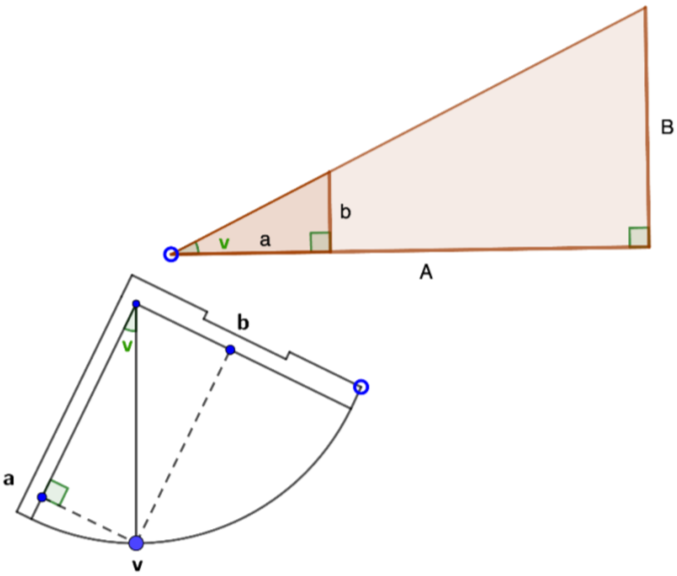
Ø7 - Hvorfor trekanten på Kvadranten er ligedannet med den trekant vi opmålte.

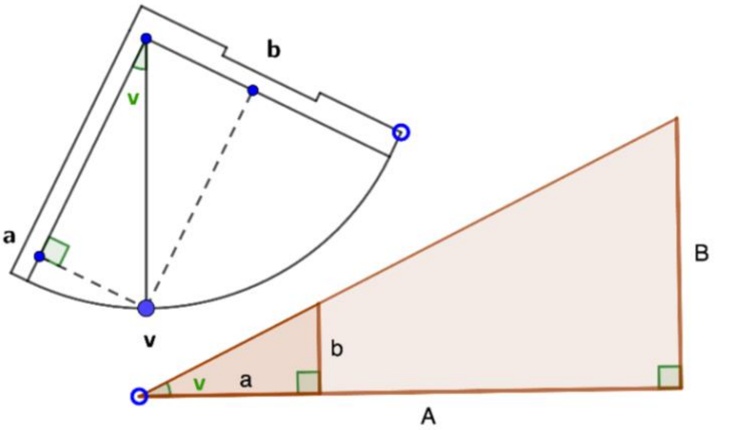
Ø8 - Hvordan enhedscirklen er defineret.

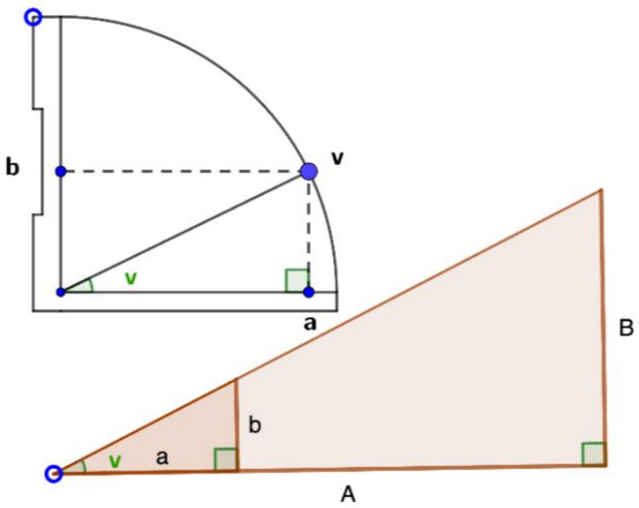
Ø9 - Bevis for beregninger i alle retvinklede med cosinus, sinus og tangens.

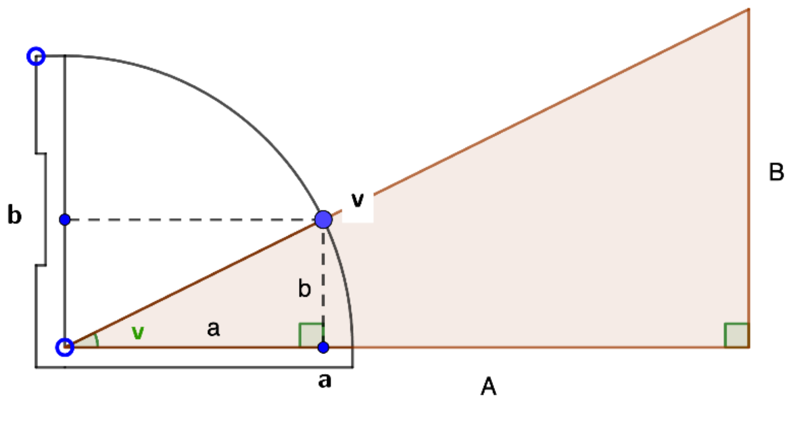
Ø7 Matematikken bag Kvadranten.

Formlen i den grå boks på forrige side gælder for ligedannede trekanter. Så hvis vi kan argumentere for, at trekanten i Kvadranten er ensvinklet med den store trekant, er vi færdige med argumentet.

Hvad bliver flyttet og hvordan bliver det flyttet, fra billede til billede?	Skriv her
	
	

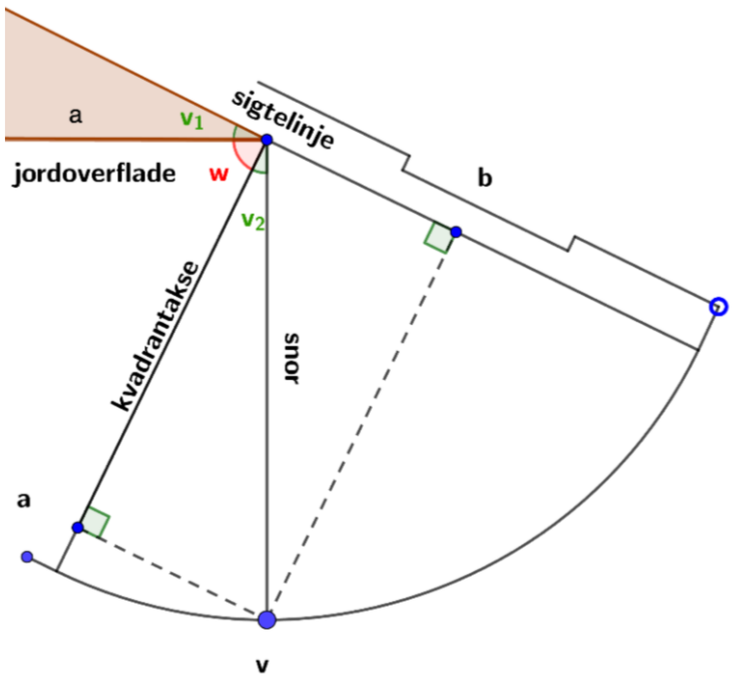






Ved at spejle, flytte og dreje kan man altså overbevise sig om, at trekanten i Kvadranten er ensvinklet med den trekant, der dannes, når man måler for eksempel højden af et træ. På næste side er det egentlige matematiske bevis.

Bevis: Vinklen i Kvadranten v_2 er lig med vinklen v_1 der dannes med jordoverfladen til det man sigter på.



Kvadranten er ført hen til trekanten og billedet er forstørret, så man bedre kan se vinklerne. Vinklerne har nu også fået hver deres navne.

1. Snoren hænger lodret ned på grund af tyngdekraften og danner derfor en vinkel på 90° med jordoverfladen. (....så man skal altså stå, på et vandret underlag…)

   Derfor må der gælde at:

   $$w + v_2 = 90°$$

2. Sigtelinjen er vinkelret på kvadrantaksen, for sådan er Kvadranten konstrueret.

   Derfor må der gælde at:

   $$v_1 + w = 90°$$

   Når begge summer giver 90° må der gælde at:

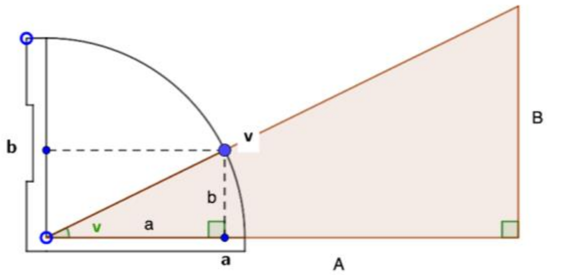
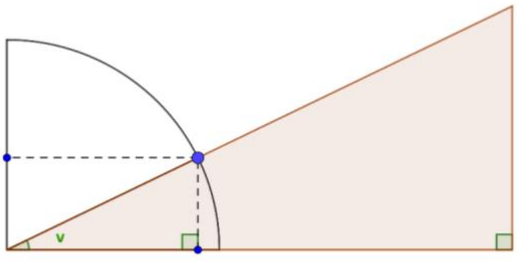
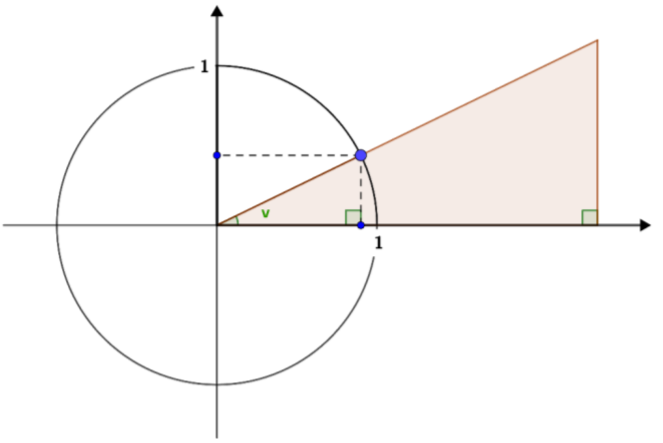
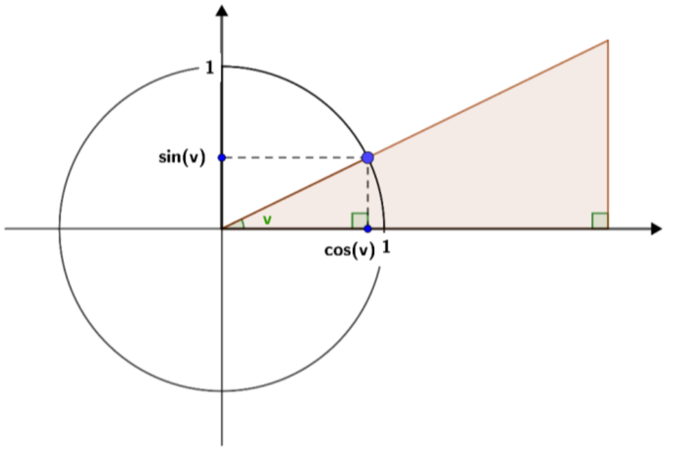
   $$v_1 + w = w + v_2$$

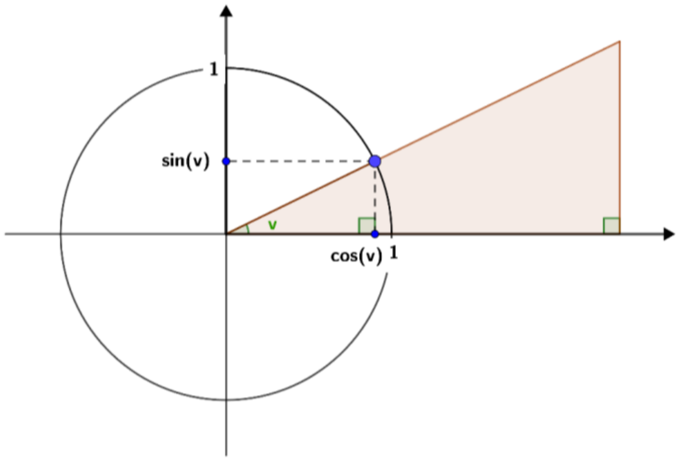
   $$v_1 = v_2$$

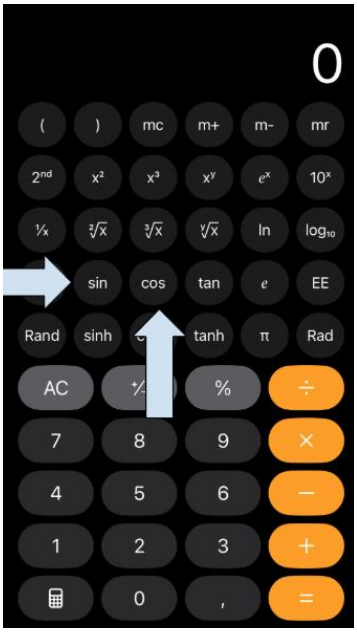
   ▪

   Spørgsmål: Hvorfor er dette nok til, at man nu kan argumentere for at de to trekanter er ensvinklede?

Ø8 Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens

 	Kvadranten er placeret så man kan se, at de to trekanter er ensvinklede. Bemærk hvor vi tidligere aflæste a og b, når vi havde målt en vinkel v.
 	Kvadranten er nu fjernet. Kun akserne og buen er tilbage. Bogstaverne er også væk, kun vinklen er tilbage.
 	Indfører et koordinatsystem med centrum ved vinklen. Buen forlænges, så der fremkommer en cirkel. Vi *beslutter* at radius på cirklen er 1. Definition på Enhedscirklen: Enhedscirklen er en cirkel med en radius på 1 og centrum i (0,0).
 	Hvor vi før aflæste a, ligger nu på x-aksen og vi *beslutter* at kalde den cosinus til v med udtrykket: cos(v) Hvor vi før aflæste b, ligger nu på y-aksen og vi *beslutter* at kalde den for sinus til v med udtrykket: sin(v) Definition på cos og sin: Beskriv billedet hvor du starter med vinklen v, og forklarer hvor man aflæser cos(v) og sin(v).





Fra Sinus Kvadranten til lommeregneren.

For en vinkel v = 26° beregn da

1. cos(v)
2. sin(v)

beregn ved at anvende knappen 2nd på lommeregneren

3. $\cos^{-1}$ til resultatet fra 1.
4. $\sin^{-1}$ til resultatet fra 2.

COSINUS

- Taster du en vinkel efterfulgt af cos, får du altså værdien af cos(v), som aflæses på x-aksen.

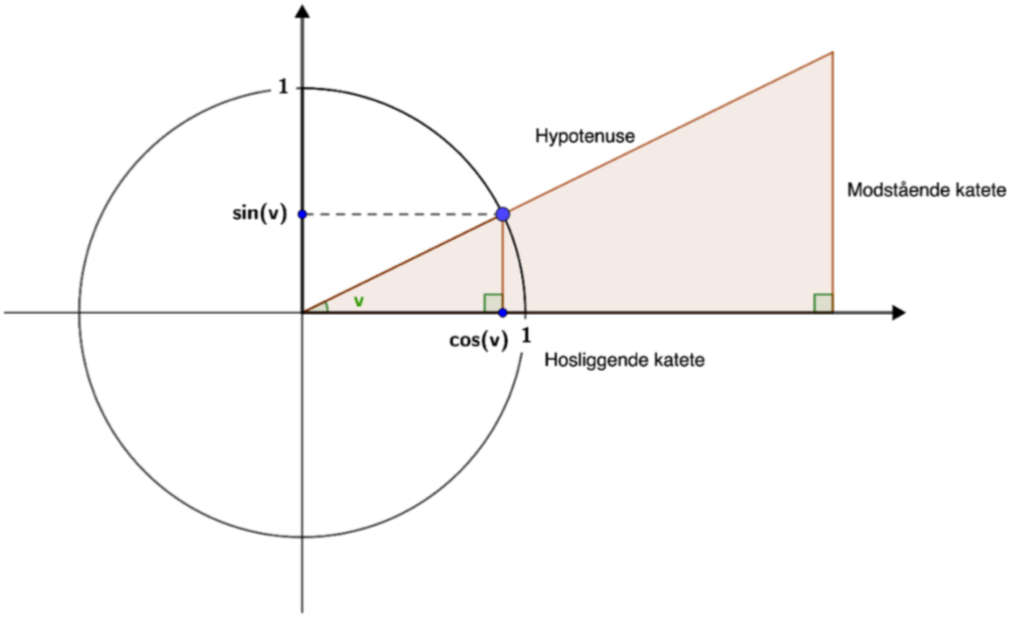
- Har du værdien for cos(v) (altså værdien på x-aksen), men gerne vil have vinklen, taster du $\cos^{-1}$.

SINUS

- Taster du en vinkel efterfulgt af sin, får du værdien af sin(v) som aflæses på y-aksen.

- Har du værdien for sin(v) (altså værdien på y-aksen), men gerne vil have vinklen, taster du $\sin^{-1}$.

Ø9 Bevis for beregninger i retvinklede trekanter



Nu hvor sinus og cosinus er defineret, vil vi gerne kunne bruge dem til beregninger i alle retvinklede trekanter. Det kræver et bevis.

Betragt den store trekant.
Vælger vi én bestemt vinkel i en retvinklet trekant, kan vi navngive siderne i forhold til vinklen, som vist på figuren ovenfor.

- Hvorfor er trekanten inde i enhedscirklen og den store trekant ensvinklede?

- Skaleringsfaktoren k, kan beregnes på følgende måder. Hvorfor kan den det?

$$k = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} \qquad k = \frac{\text{Modstående katete}}{\sin(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

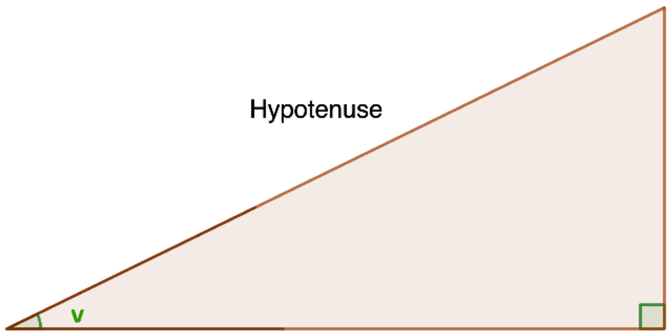
• Vi ser nu på to af udtrykkene. Hvad sker der matematisk ved hver pil? $k = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$ $\Updownarrow$ $\frac{\text{Hosliggende katete}}{\cos(v)} = \frac{\text{Hypotenuse}}{1} = \text{Hypotenuse}$ $\Updownarrow$ $\text{Hosliggende katete} = \text{Hypotenuse} \cdot \cos(v)$ $\Updownarrow$ $\frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos(v)$	

• Vi ser nu på to af de andre udtryk. Forsæt på samme vis som ovenfor.

$$k = \frac{\text{Modstående katete}}{\sin(v)} \qquad k = \frac{\text{Hypotenuse}}{1}$$

$$\Updownarrow$$

Beregninger i retvinklede trekanter - overblik

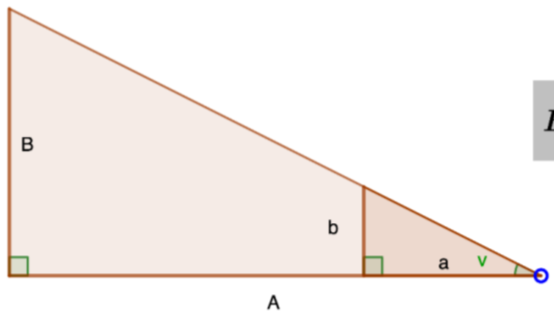


$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan(v) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$

Formlen for tangens er et resultat af, at den er defineret ud fra cosinus og sinus.

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{\frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenuse}}}{\frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Hosliggende katete}} = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$

Nu har vi redskaberne til at bestemme højden af et træ ud fra sigtevinklen, afstanden hen til træet og en lommeregner.



$$B = \frac{b}{a} \cdot A = tan(v) \cdot A$$