

## Lærervejledning En vinkel på trigonometri

Tag enhedscirklen under armen og med ud i naturen, hvor den anvendes i undersøgende øvelser, uden brug af computer.

Undervisningsmaterialet er udarbejdet med henblik på matematik A, B og C i gymnasiet, men den praktiske del kan også anvendes på HF og i udskolingen.

Materialet sigter på at opnå en større faglig dybde, hvor eleverne møder trekanter, retvinklede trekanter, skalering af ligedannede trekanter, helt frem til definitionerne af og arbejde med cosinus, sinus og tangens.

Materialet kan derfor anvendes til at dække en stor del af kernepensum indenfor geometri og trigonometri i den nye læreplan på stx.

Centralt for øvelserne indgår der en Kvadrant, som har flere funktioner. Ud over at være en vinkelmåler, kan den også bruges til aflæsning af værdierne for cosinus og sinus for en given vinkel, og omvendt. Den fungerer derfor som en analog lommeregner.

Forløbet lader først eleverne få forståelse for egenskaberne ved ligedannede trekanter i praksis, for derefter at introducere Kvadranten. På Kvadranten genfindes den ligedannede trekant samtidig med at akserne for aflæsning af cosinus og sinus introduceres. Eleverne arbejder derfor med en håndgribelig aflæsning af cosinus og sinus knyttet til ensvinklede trekanter, ved løsning af praktiske problemstillinger. Aflæsningen på Kvadranten knyttes til lommeregneren eller CAS-værktøjets funktioner og afslutningsvis præsenteres de for definitionen af de trigonometriske funktioner med enhedscirklen og sætningerne for beregninger i retvinklede trekanter gennemgås.

Der er 9 øvelser opdelt i en praktisk del med 6 øvelser og en teoretisk del med 4 øvelser.

De praktiske øvelser er udførligt beskrevet herunder, og udleveringsark til eleverne kan findes i filen: "Trigonometri – praksis i naturen - elevmateriale.docx/pdf", som kan printes til eleverne inden forløbet startes. Det kan være en god idé at laminere udleveringsarkene og bruge tavletusser, så eleverne kan tegne skitser, lave korte regnestykker og ikke mindst viske ud igen.

I filen: "Kvadrant.docx" findes en printbar version af Kvadranten.

Da øvelserne i høj grad er tænkt som undersøgende, er handouts ikke nødvendige men anbefales afhængigt af elevernes niveau og klassekultur.

På hjemmesiden ligger der en fil: "Præsentation Trigonometri i naturen.docx/pdf", som kan printes i A3-format og medbringes til undervisning udenfor klasselokalet.

De teoretiske øvelser har til formål, at bruge den praktiske erfaring eleverne har fået med Kvadranten til at komme tilbage i lærebogs vant terminologi.

Omfanget er 3-6 moduler.

### Fagligt indhold:

Ligedannede/Ensvinklede trekanter og skaleringsfaktoren, de trigonometriske funktioner, samt beviset for beregninger i retvinklede trekanter. Referencer til læreplanen i gymnasiet er blandt andet:

- Matematikkens metoder.
- Opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer.
- Operere med og redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt de induktive og deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori.
- Demonstrere viden om matematikanvendelse.
- Kommunikere aktivt i, med og om matematik i mundtlig og skriftlig formidling.
- perspektivere matematik gennem eksempler med udgangspunkt i matematikkens historie.

### Forarbejde

Printe udleveringsark, præsentation og lave laminerede skrivetavler.

Snor (en rulle murersnor), pløkker (min 3 pr. gruppe) og målebånd (5-10 m). Tusser.

Printe og konstruere Kvadranter.

### Indhold

Del 1 Praktik (Trigonometri – praksis i naturen - elevmateriale.docx/pdf)

- Ø1A Skygger (Hvis altså solen skinner) – øvelse om ligedannede trekanter.
- Ø1B Snorstråle (Hvis den ikke gør) – øvelse om ligedannede trekanter.
- Ø2 Ligedannede trekanter - opgaver om ligedannede trekanter som opsamling til Ø1
- Ø3 Målinger i Naturen - ligedannede trekanter – praktisk anvendelse af opnået viden.
- Ø4 Kvadrantens opbygning (del 1) og brug (del 2).
- Ø5 Målinger i Naturen – nu med Kvadranten.
- Ø6 Kvadranten og lommeregneren.

Del 2 Teori (Trigonometri – fra praksis til teori - elevmateriale.docx/pdf)

- Ø7 Matematikken bag Kvadranten.
- Ø8 Enhedscirklen og definitionen af cosinus, sinus og tangens.
- Ø9 Bevis for beregninger i retvinklede trekanter.

## Instruktioner

### Intro

"Spørgsmålet om, hvorvidt matematik er opdaget eller opfundet, er vist ikke endeligt afgjort. Måske er det begge dele?"

"Med denne samling af øvelser vil I erfare, at med ganske få regler (i matematik kaldet aksiomer), gode ideer og logiske argumenter, kan I komme ret langt med indsigt i hvad matematik er og hvordan matematik kan anvendes."

"I vil få en fornemmelse af hvordan matematik kan blive til og hvordan det I har erfaret kan anvendes i praksis. I vil blandt andet få indsigt i, hvordan man ved at måle det nære, kan beregne sig frem til noget i det fjerne."

Indledende Fang og Forudsætninger, med spørgsmål som; "Kan I se matematik i naturen omkring jer?", "Hvad er det mest enkle matematik, I kender?", "Er matematik opdaget eller opfundet?", "Hvordan ved I det I ved?"

"I matematik finder vi selv på reglerne – det må man ikke i naturvidenskab. I skal opleve hvordan vi med regler vi selv finder på, sammen med logiske argumenter, kan se nogle konsekvenser der kan anvendes praktisk."

Hver øvelse afsluttes med en opsamling, hvor en gruppe præsenterer deres løsning.

### Ø1A Skygger (Hvis altså solen skinner)

Undersøgelser af omgivelserne ved beregninger af forhold.

Undersøgelse af forholdet mellem genstandes højde og deres skyggers længde. Øvelsen har et udleveringsark, hvorpå eleverne kan tegne skitser, skrive data og udføre beregninger.

- Målebånd anvendes og lommeregner anbefales.
- I "Præsentation Trigonometri i naturen" er der en illustration af opstillingen og ligningerne.

#### Læreintro:

"Når solen skinner kaster vi alle en skygge. Hvad afhænger skyggens længde af? Hvad sker der med skyggens længde hvis vi halverer genstandens højde? Hvad tid på dagen er en skygge længst?"

Vælg en elev og stil en pind i elevens skygge, så toppen af de to skygger er sammenfaldende. Italesæt de to retvinklede trekanter der opstår, diskutér hvorfor de er retvinklede og hvorfor de er ligedannede.

Uddel uddelingsark handout og igangsæt elevernes egne undersøgelser.

#### Metode:

Måle højder af genstande og deres skygger. Beregn forhold med få decimaler.

#### Opgaven:

Find 2-3 genstande og udfyld skemaet og udfør beregningerne på handout.

#### Opsamling:

Viser præsentation hvor to ligedannede trekanter er tegnet ind i hinanden eller én af elevernes egne skitser. (brug solvinklen som argument for ensvinklede trekanter) og inddrag eleverne og deres resultater. Fremhæv det konstante forhold mellem siderne (skaleringsfaktoren) og hvordan det kan bruges til at transformere den ene trekant om det den anden. Vis algebraen der leder til formlen for bestemmelse af højden (af f.eks. et træ).

### Ø1B Snorstråle (Hvis den ikke gør)

Modellering og undersøgelser af omgivelserne ved beregninger af forhold.

Eksperimenterende tilgang, hvor eleverne danner deres egne lignedannede trekanter med brug af træer, snor, pløk og pind. Øvelsen har et uddelingsark, hvorpå eleverne kan tegne skitser, skriver data og udføre beregninger.

- Snor, pløk, pind og målebånd. Gerne en lommeregner på telefonen.
- I "Præsentation Geometri" er der en illustration af opstillingen og ligningerne.

#### Læreintro:

"Når solen skinner kaster vi alle en skygge. Hvad afhænger skyggens længde af? Hvad sker der med skyggens længde hvis vi halverer genstandens højde?"

Vælg en elev og bed eleven om at holde en snor til toppen af sit hoved og stram snoren ud med en pløk i jorden. Anvend en pind ca. halvt så lang som eleven er høj og placer den mellem eleven og pløkken, så den flugter med snoren. Italesæt de to retvinklede trekanter der opstår og diskutér hvorfor de er retvinklede og hvorfor de er lignedannede.

Uddel handout og igangsæt elevernes egne undersøgelser.

#### Metode:

Fastgør snoren til et træ og dan en retvinklet trekant ved at fastgøre den anden ende af snoren, med en pløk i jorden. Placer en pind mellem træ og pløk og mål højderne og længderne, som angivet på handout.

#### Opgaven:

Fastgør snoren til et træ og dan en retvinklet trekant ved at fastgøre den anden ende af snoren, med en pløk i jorden. Udfyld skemaet og udfør beregningerne på uddelingsarket.

#### Opsamling:

Vis præsentation hvor de to trekanter er tegnet ind i hinanden (brug solvinklen som argument for ensvinklede trekanter) og inddrag eleverne og deres resultater. Fremhæv det konstante forhold mellem siderne (skaleringsfaktoren) og hvordan det kan bruges til at transformere den ene trekant om det den anden. Vis algebraen der leder til formelen for bestemmelse af højden (af træet).

## Ø2 Ensvinklede/ligedannede trekanter.

Opgaver hvor elever kan teste om de behersker skaleringsfaktoren ved klassisk opgaveløsning.

### Læreintro:

- Opsumming af skaleringsfaktoren og uddeling af handout.
- I "Præsentation Geometri" er der en forstørret kopi af handout.

### Metode:

Identificér de to ligedannede trekanter. Vælg én side med et tal og find den tilhørende side i den anden trekant.

### Opgaven:

Finde de manglende sider i trekanterne og argumentere for hvordan de er fundet.

### Ø3 Målinger i Naturen - ensvinklede trekanter

Afkode matematiske problemstillinger og matematisk modellering ved praktisk anvendelse af geometriske metoder.

Eleverne skal anvende viden om ligedannede trekanter til at bestemme højder og afstande i omgivelserne. For at danne to ligedannede trekanter, skal eleverne anvende dem selv eller genstande de finder i naturen. Der er to uddelingsark til øvelsen, som kan anvendes i problemløsningen. Den blå cirkel på figurerne angiver stedet man sigter fra og punkterne er personer eller genstande.

- Målebånd og uddelingsark.
- I "Præsentation Trigonometri i naturen" er der en forstørret udgave af uddelingsarket.

#### Læreintro:

"Den viden I nu har om ligedannede trekanter kan anvendes til at løse problemer i den virkelige verden. Helt konkret kan vi bestemme højder og afstande i det fjerne, ved at måle det nære."

Repetér skaleringsfaktoren/forholdet for ligedannede trekanter.

"Vi kan bestemme højden af et træ, eller afstanden til et utilgængeligt sted, som en ø, ved at danne to ligedannede trekanter. Den store af trekanterne skal have en side der svarer til det vi gerne vil bestemme højden eller afstanden til, og den lille trekant skal vi kunne foretage en måling på. Opgaven består altså i at placere de to trekanter på en fornuftig måde – og så handler det om at sigte."

Uddel udleveringsark og forklar metoden.

#### Metode:

Find objekter som man ønsker at finde højden af eller afstanden til. Træer, en bakke, et tårn, et vandløb, en sø eller en kyst giver opgaven relevans. Vælg samme opgave til hele klassen i første omgang.

- Eleverne diskuterer hvilken geometri fra figurerne på uddelingsarket som kunne være egnet til opgaven, og indtegner placeringen af det objekt de vil måle på i figuren.
- Eleverne anvender dem selv eller genstande til at danne den valgte geometri og foretager de relevante opmålinger.

#### Opgaven:

- a. Diskuter hvordan I kan anvende én eller flere af de geometriske figurer til at bestemme højden af træet på Naturlegepladsen. Indtegn på det udleverede ark hvor man kunne placere træet og genskab opstillingen i virkeligheden. Tegn en skitse af situationen hvor metoden, målingerne og beregningerne fremgår.
- b. Diskuter hvordan I kan anvende én eller flere af de geometriske figurer til at bestemme afstanden over til øen i Åkande sø. og bestem den. Indtegn på det udleverede ark hvor man kunne placere øen og søen, og genskab opstillingen i virkeligheden. Tegn en skitse af situationen hvor metoden, målingerne og beregningerne fremgår.

Opsamling: Den metode i her har anvendt er grundelementet i de metoder man bruger til at opmåle land, skabe landkort, bestemme afstanden til solen, afstanden til månen altså at foretage opmålinger af naturen.

#### Ø4 Kvadrantens opbygning (del 1) og brug (del 2)

Afkode Kvadrantens geometri og matematiske problemstillinger, samt matematisk modellering ved praktisk anvendelse af Kvadranten.

Formålet med disse to øvelser er at erfare, at den lille af de to retvinklede trekanter man målte op i de foregående øvelser, dannes på Kvadranten. Dette kræver en forståelse af Kvadrantens geometri (del 1) og hvordan den bruges i praksis (del 2).

Kvadrantens geometri knytter en vinkel til et koordinatsæt ved aflæsning på to akser. Akserne er navngivet Cosinus og Sinus, uden at eleverne på dette tidspunkt behøver vide andet end at det bare er navngivning. På elevernes handout anvendes formlerne med samme symboler fra de tidligere øvelser igen, men nu med den ligedannede figur på Kvadranten. På Kvadranten er valgt en skala fra 0-10, for at gøre elevernes arbejde med decimaler lettere, men i handouts bliver eleverne gjort opmærksomme på at det er angivet i 10ende dele. Der er frit valg, men anvendelse af 10ende dele gør springet til enhedscirklen og lommeregneren lettere.

I del 2 gentager eleverne målingen af et træes højde, men nu med Kvadranten.

#### Lærerintro:

Del 1: Lær Kvadranten at kende/Kvadrantens opbygning.

"Den udleverede Kvadrant er en modernisering af et historisk astronomisk måle- og regne instrument, anvendt i Mellemøsten og Asien fra ca. år 1000 evt. og frem."

"Betragt det som et arkæologisk fund i lige har gjort. Beskriv for hinanden hvad I observerer og hvordan I mener den kan anvendes"

Uddel udleveringsark til træning i aflæsning af Kvadranten.

Del 2: Kvadranten og ligedannede trekanter/Kvadranten i brug.

Denne del har til formål at knytte forbindelsen mellem Kvadranten og skaleringen for ligedannede trekanter. Den kan gribes undersøgende an og/eller man kan uddele uddelingsarket (del 2):

"Hvis I sigter på toppen af et træ eller måler vinklen mellem snorstrålen og jorden, kan I finde en retvinklet trekant på Kvadranten der er ligedannet med den store retvinklede trekant. Prøv jer frem og når I har fundet den: Hvorfor er de ligedannede og kan I få samme højde af træet som før? Alternativt kan man ved brug af den indtegnede trekant på Kvadranten, vise et tænkt eksempel med  $30^\circ$ .

#### Opgaverne:

Del 1:

- Beskriv for hinanden hvad I observerer og hvordan I mener det kan anvendes.
- Løs opgaverne på handouts ved brug af Kvadranten.

Del 2:

- Find den retvinklede trekant på Kvadranten der er ligedannet med den store retvinklede trekant i danner med det I sigter på.
- Bestem højden af træet og sammenlign med det resultat I fik med brugen af ligedannede trekanter.



## Ø5 Målinger i Naturen – Kvadranten.

Afkode matematiske problemstillinger og matematisk modellering ved praktisk anvendelse af geometriske metoder.

På næste side er der eksempler på opgaver der bliver løst i Svanninge Bjerge.

På samme måde som eleverne arbejdede med højde og afstandsbestemmelse med lignedannede trekanter i Ø3, skal de her anvende Kvadranten. Der er et udleveringsark til øvelsen med illustrationer af brug af kvadranten, formler og plads til skitser og beregninger, som kan anvendes i problemløsningen. Den blå cirkel på figurerne angiver stedet man kan sigte fra.

- Kvadrant, målebånd og handout.

### Lærerintro:

”Den viden I nu har om lignedannede trekanter og brugen af Kvadranten, kan anvendes til at løse problemer i den virkelige verden. Helt konkret kan vi bestemme højder og afstande i det fjerne, ved at måle det nære.”

Repetér skaleringsfaktoren/forholdet for lignedannede trekanter og hvordan en lignedannet trekant kan dannes på Kvadranten når man sigter. Brug de grønne linjer på Kvadranten ved  $30^\circ$ . Der findes en illustration af metoderne i ”Præsentation”

”Vi kan bestemme højden af et træ, eller afstanden til et utilgængeligt sted, som en ø, ved at sigte med Kvadranten. På kvadranten dannes en retvinklet trekant, der er lignedannet med den store retvinklede trekant der udgøres den der sigter, det man sigter på og et tredje passende punkt. Opgaven består altså i at placere gruppens medlemmer eller hvad I kan finde i naturen, så de danner en retvinklet trekant – og så handler det om at sigte.”

### Metode:

Find objekter som man ønsker at finde højden af eller afstanden til. Træer, en bakke, et tårn, et vandløb, en sø eller en kyst giver opgaven relevans. Vælg samme opgave til hele klassen i første omgang.

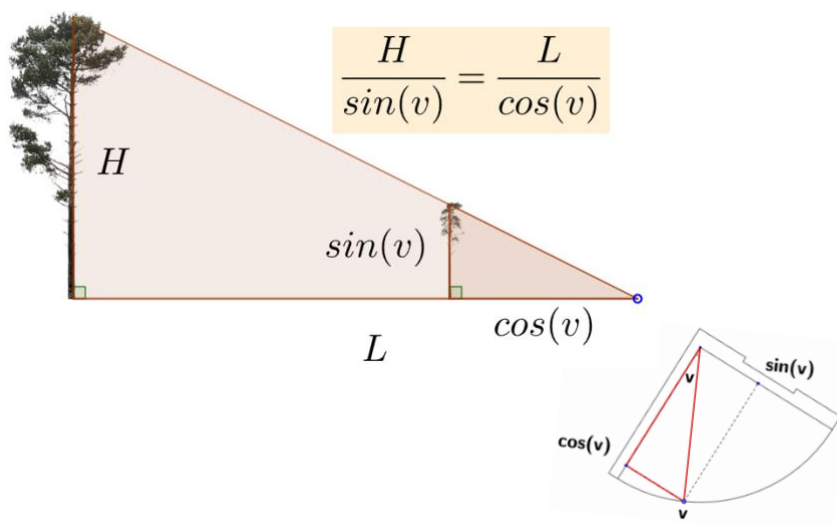
- Eleverne diskuterer hvilken geometri fra figurerne på handout, der kunne være egnet til at løse opgaven, og indtegner placeringen af det objekt de vil måle på i figuren.
- Eleverne anvender dem selv eller genstande til at danne den valgte geometri og foretager de relevante opmålinger.

### Opgaven:

- a. Diskuter hvordan I kan anvende Kvadranten til at bestemme højden af træet på Naturlegepladsen. Indtegn på det udleverede ark hvor man kunne placere træet og genskab opstillingen i virkeligheden. Tegn en skitse af situationen hvor metoden, målingerne og beregningerne fremgår.
- b. Diskuter hvordan I kan anvende de geometriske figurer til at bestemme afstanden over til øen i Åkande sø. og bestem den. Indtegn på det udleverede ark hvor man kunne placere øen og søen, og genskab opstillingen i virkeligheden. Tegn en skitse af situationen hvor metoden, målingerne og beregningerne fremgår.

Ø5 forsat – eksempler på praktisk brug af kvadranten

Teltets højde

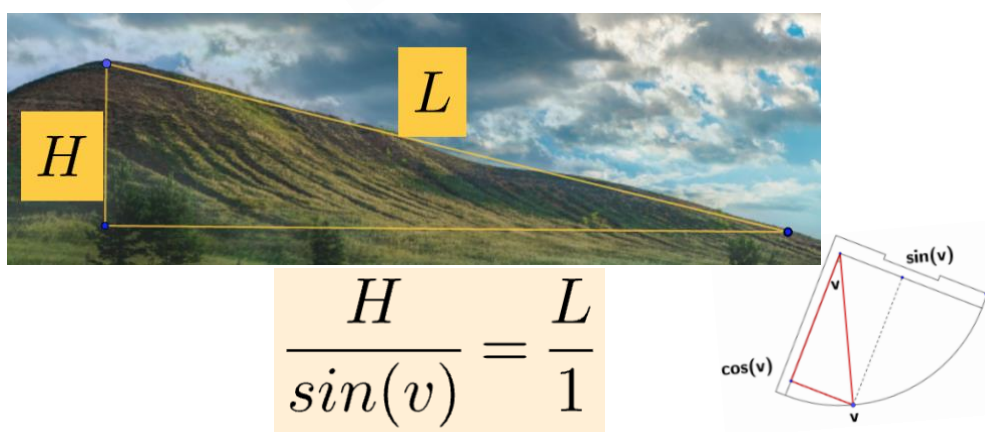


Øen i søen

$$\frac{L}{\sin(v)} = \frac{A}{\cos(v)}$$



Lerbjergs højde



## Ø6 Kvadranten og lommeregneren

Aflæse koordinatsæt på Kvadranten og lære lommeregneren/CAS-værktøjet at kende.

Husk at Kvadrantens akser er angivet i 1/10.

- Sekant og lommeregner. Suppler evt. med CAS-værktøj

### Lærerintro:

”Kvadranten fungerer som en lommeregner, hvor den uafhængige variable er en vinkel og vi kan aflæse de afhængige variable, værdierne for cosinus og sinus. Omvendt kan vi også finde den vinkel der passer til en bestemt værdi for f.eks. sinus. Denne funktion er bygget ind i jeres lommeregner. Nu skal i undersøge sammenhængen selv.”

Uddel handout.

### Metode:

Anvend handout

### Opgaven:

Test funktionerne for de trigonometriske funktioner på lommeregneren og efterprøv med Kvadranten.

<sup>1</sup>Sinus Kvadranten.

Google ”sine quadrant” og en verden af indgange til dette historiske instrument åbner sig. Her er et par henvisninger:

1. [Wikipedia](#)
2. Sinus Kvadranten i tilgængelig detalje: [Trigonometric Solutions Using Sine Quadrant](#) (ScienceDirect, 2010)
3. Svært High School materiale (engelsk) om Sinus Kvadranten til beregninger med printbar version med flere funktioner <https://www.astrolabeproject.com/>
4. Sinus Kvadranten i større detalje: [Mathematical Instrumentation in Fourteenth-Century Egypt and Syria](#) ([Google Books](#))
5. [Arabiske tekster om Sinus Kvadranten](#).