Fra din næse til stjernerne
– geometri i praksis

Matematisk argumentation og anvendelse under åben himmel.

Øvelser

Lærervejledning Geometri

Dette undervisningsmateriale har fokus på undersøgende undervisning uden for klasserummet, uden brug af computer, og er udarbejdet til matematik i udskolingen og 1.g i gymnasiet. Materialet er tilrettelagt, så eleverne med få instrukser bruger sig selv, enkle genstande og måleværktøjer til at opnå viden om geometri.

Formålet er at give eleverne en rumlig oplevelse af geometri og geometriske problemstillinger. I forløbet opdager de viden om ligedannede trekanter og ser, hvordan disse kan anvendes i praksis. Dette bruger de til at opstille geometriske modeller og løse opgaver i naturen. Undervejs er der fokus på matematisk metode og argumentation.

Samlet kommer øvelserne omkring geometriske figurer, vinkelsummen i en trekant, de fem trekantstilfælde, retvinklede trekanter og Pythagoras' læresætning, ligedannede trekanter og skaleringsfaktoren samt cirklen.

Øvelserne er udførligt beskrevet herunder, efterfulgt af udleveringsark, som kan printes og udleveres til eleverne. Eleverne får brug for at tegne skitser og løse korte regnestykker.

Øvelserne indgår i en samlet fortælling, der tager udgangspunkt i istidslandskabet i Svanninge Bjerge og -bakker. Dele af denne fortælling er gengivet som intro til øvelserne som "Fang"-delen af UBNU-tilgangen.

På hjemmesiden findes filen "Præsentation Geometri i praksis.docx", som kan printes i A3-format og medbringes som tavler til undervisning uden for klasselokalet.

Omfang: 3–6 moduler afhængigt af, hvor mange øvelser der medtages.

Fortælling & progression

I den første øvelse, "Afstanden til Månen", finder eleverne — uden at få formålet afsløret — et forhold mellem højde og grundlinje i en ligebenet trekant. Dette forhold skal senere bruges til at bestemme afstanden til Månen.

For at kunne løse/anvende måneøvelsen skal eleverne, gennem kropslige øvelser, opleve og argumentere sig vej via:

- definition af vinkler,
- argumentation for vinkelsummen i en vilkårlig trekant,
- skalering af ligedannede (ensvinklede) trekanter.

Det er ikke alle øvelser i dette materiale, der er nødvendige for at løse måneopgaven, men de er medtaget for at øve de opnåede kompetencer og perspektivere idéerne. Blandt andet indgår Pythagoras' læresætning til bestemmelse af afstanden til horisonten for en person, der kigger ud over havet.

Forarbejde

Print udleveringsark og præsentation; lav laminerede skrivetavler.

Materialer pr. gruppe: snor (en rulle murersnor), pløkker (min. 3, 9 til Pythagoras' læresætning), målebånd (5–10 m) og whiteboardtuscher.

Smartphone-kompas/vaterpas kan fungere som vinkelmåler, når I er ude.

Intro (til læreren – kort manus til opstart)

Formål med åbningen (2–3 min)

Sætte scenen for et forløb, hvor vi starter med kroppen som instrument og ender med metoderne bag at bestemme afstande på himlen (parallakse-idéen).

Rammesætte matematik som både *menneskeskabt sprog* (definitioner, argumenter) og *værktøj til verden* (modeller, målinger).

Kerneidé (hvad eleverne skal høre)

“Matematik er et fælles sprog, vi har udviklet for at beskrive og løse problemer. Med få enkle regler og observationer kan vi måle og modellere vores omgivelser—fra en pind i jorden til afstande på himlen.”

Historisk ramme (2 min – hvorfor matematik?)

Mennesker har længe talt, målt og delt; kendte spor går tusinder af år tilbage. Et af de tidligste tegn på menneskelig matematisk aktivitet er en ca. 20.000 år gammel knogle fundet i Centralafrika med hakker — det minder om, at noget er blevet talt.

Udviklingen i matematik har fulgt samfundets behov: fordeling, jordmåling, byggeri, navigation — opgaver, som krævede præcise metoder. Et eksempel på en klassisk opgave, fundet på 3000 år gamle lertavler i Grækenland, er følgende: “Én person arbejder tre gange så meget på den samme opgave som en anden. Opgaven betales med 20 sække korn. Hvordan skal sækkene fordeles retfærdigt mellem de to?”

Aktiv elev-aktivering (3–5 min) – “levende tidslinje”

Stil eleverne i en halvcirkel som en grov tidslinje over “mennesker & matematik” — fra Homo sapiens’ tilblivelse for ca. 300.000 år siden til isfrit landskab og mennesker i Danmark for ca. 12.000 år siden. Lad dem hurtigt beregne, hvor mange år de hver især repræsenterer, og placér nedslagene. Pointe: Vi kender kun en lille del af historien, men behov har løbende drevet nye metoder frem.

Inddel eleverne i grupper på mindst tre.

Bro til forløbet (1 min) – fra kroppen til kosmos

“Vi er midt ude i naturen - vi har ingenting, kun naturen. Så vi starter med ingenting, og kommer til at udvikle matematikken ud fra ingenting.”

Den første øvelse er tænkt som en teaser og afsluttes med, at eleverne får at vide, at vi til sidst skal anvende deres resultat til at bestemme afstanden til Månen.

Ø1 Afstanden til Månen, intro.

Hvor scenen sættes til dagens øvelser, og et gennemsnit beregnes.

Eleverne skal i grupper bestemme forholdet mellem højde og grundlinje i en ligebenet trekant, som de selv danner.

Fremgangsmåde:

Udgangspunktet er grupper på 4.

Alle elever danner to rækker på følgende måde:

1. Én gruppe deles i to, som stiller sig front mod hinanden med et par meters mellemrum. Det er starten på de to rækker.
2. Næste gruppe deles i to og gør det samme i forlængelse af den første gruppe, osv.

Eleverne arbejder herefter i stadig kun i grupperne.

Instruktion:

3. Rækken der står stille: De to elever stiller sig sammen, skulder mod skulder.
4. Rækken der skal gå: De afstemmer deres skridtlængde, så den passer med skulder-mod-skulder afstanden for dem der står stille i den anden række.
5. Dem der skal gå:
    - Stræk begge arme helt frem foran dig, og strit med lillefingrene tæt sammen.
    - Gå baglæns, indtil bredden af lillefingrene *netop* dækker dem der står stille.
    - Tæl hvor mange skridt der er tilbage til dem der står stille.
6. Alle mødes igen i de to rækker.

Opsamling:

Alle afstande samles af lærer eller elever, og gennemsnittet beregnes. (Det er super godt at ramme tallet 30… ☺)

”Husk dette tal; det skal vi bruge til at bestemme afstanden til Månen. Men før vi kan det, skal vi ud at finde på noget mere matematik.

Ø2 Bevis for vinkelsummen i en trekant.

Hvori der trænes matematisk argumentation.

Med 4 pinde skal eleverne argumentere for vinkelsummen i en trekant. De bliver introduceret til begrebet grader og de matematiske værktøjer, de skal bruge for at løse opgaven.

Hver gruppe skal bruge 4 pinde af ca. en armslængde - ud i skoven og find dem.

Læreintro:

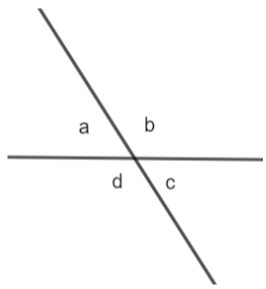
Det følgende er sætninger til inspiration for uddybende samtale med eleverne om deres forforståelse.

”I øvelsen om afstanden til Månen, brugte i jeres lillefinger i udstrakt arm - dette svarer ca. til én grad. Kig på jeres næse og drej én gang rundt om jer selv - hvor mange grader har jeres næse drejet på turen hele vejen rundt i horisonten? Én grad er defineret ved at dele hele denne tur op i 360 lige store stykker - en idé vi mennesker selv er kommet på. Havde man besluttet at der var 36 grader hele vejen rundt, ville bredden af jeres lillefinger svare til…?”

Samtalen kan suppleres med hvad der udgør en geometrisk figur, hvilke typer der findes og hvad der kendetegner dem.

Fremgangsmåde:

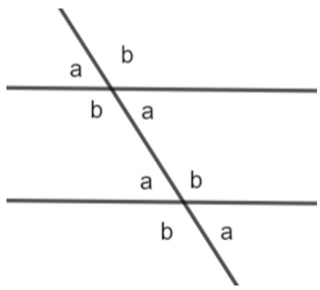
1. Sammen ser vi først på én pind lagt på jorden og taler om 180° - næsen er vinkelmåleren.
2. To pinde krydses og vi taler om topvinkler.



(Placér lærer i a og en elev i b og d. Lærer står på venstre pind og går højre om 180°. Lærers vinkel + elev-ds vinkel er 180°. Samme gentages ved at lærer står på højre pind og går venstre om 180°. Det er lige meget hvilken vej læreren går for at dreje 180°, så de to elevers vinkel må være den samme.)

3. En tredje pind lægges parallelt og det diskuteres hvorfor reglerne illustreret til højre, gælder.

(To elever går langs de vandrette parallelle pinde fra venstre mod højre - deres næse peger samme vej. Når de når til krydset, drejer de mod højre - deres næser peger stadig samme vej. Begge næser må have drejet det samme.)

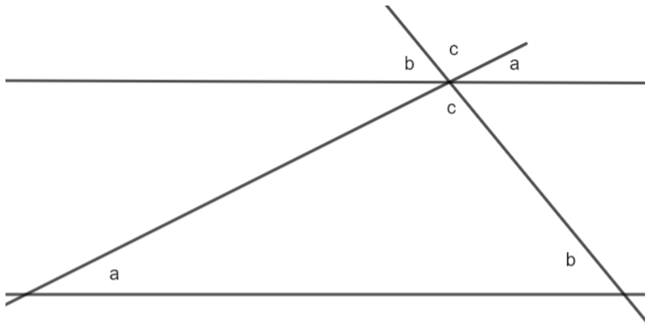


Metode:

Dan en trekant med tre pinde så alle sider krydser hinanden. Placer den fjerde pind parallelt med en af pindene i trekanten, så den rører den modstående vinkel.

Opgaven:

Benyt de to regler vi har argumenteret os frem til, til at argumentere for at vinkelsummen i enhver trekant er 180°.



Opsamling:

Når "vi" beslutter at der er 360° grader horisonten rundt, er der i alle trekanter en vinkelsum på 180°.

Ø2 Trekanter - hvad er nok at vide?

Undersøgelsesbaseret tilgang til afprøvning af påstand. Dybdeforståelse af de fem trekantstilfælde og træning af argumenter. Denne øvelse er ikke en nødvendig del af Månefortællingen.

Ved brug af pinde skal eleverne eksperimentere sig frem og afprøve, om de kan danne mere end én trekant med tre givne størrelser. Eleverne får uddelingsark med de fem trekantstilfælde som skal testes af.

Hver gruppe skal bruge mindst 3 pinde.

I ”Præsentationen” er der en forstørret udgave af udleveringsarket, som kan bruges som ”tavle”.

Læreintro:

Med tre pinde på jorden: ”På hvilke måder kan vi ændre en trekant?” eller ”Hvad skal man have med for at beskrive en konkret trekant for andre?”. Svaret er, at en trekant består af 3 sider og 3 vinkler; der er i alt 6 oplysninger (variable) om en trekant.

”Hvor mange forskellige trekanter kan vi danne, hvis vi kender alle sidernes længder?”

”Hvor mange forskellige trekanter kan vi danne, hvis vi kender alle vinklerne?”

”Påstand: alt man behøver at vide for at fastlægge **én** bestemt trekant, er tre ud af de seks oplysninger.”

Fremgangsmåde:

Udleveringsarket udleveres.

Dan trekanter af de tre pinde. Med udgangspunkt i hver figur på udleveringsarket stilles spørgsmålet:” Kan man konstruere to forskellige trekanter med de samme 3 oplysninger, og hvis ikke, hvorfor?”

Vigtigt! - konstruér trekanter så grenene overlapper hinanden.

Opgaven:

Brug pindene til at undersøge, om påstanden om at tre oplysninger nok til at fastlægge én bestemt trekant, er rigtig.

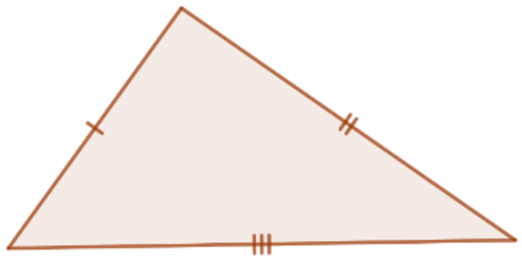
Opsamling:

Trekanten nederst til højre på udleveringsarket har ikke en entydig løsning. Brug den venstre pind som “passerarm” til at illustrere, at der kan konstrueres to forskellige trekanter (sving pinden som en bue om det faste punkt, så den skærer den kendte side i to positioner).
Pointen om, at en trekant, hvor man kun kender alle tre vinkler, ikke er entydig, tages op i **Øvelse 4**.

<u>Påstand:</u> alt man behøver at vide for at fastlægge **én** bestemt trekant, er 3 oplysninger:

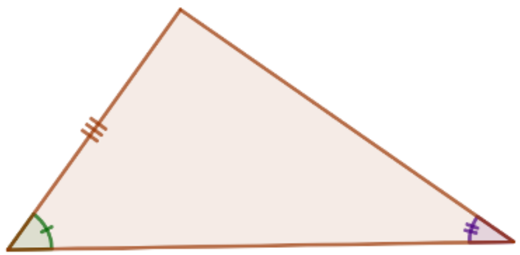
Altså

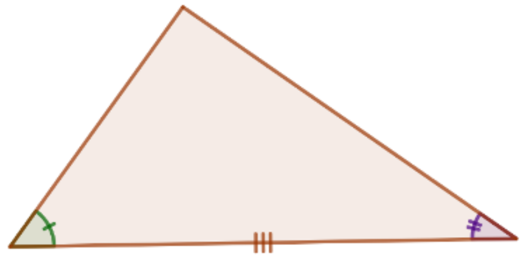
3 sider:



eller

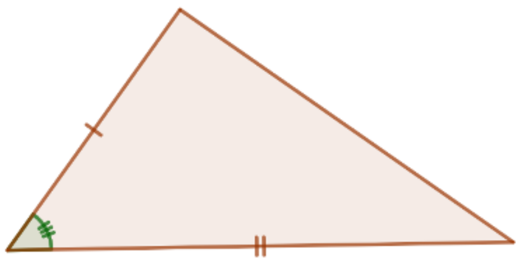
2 vinkler og 1 side:

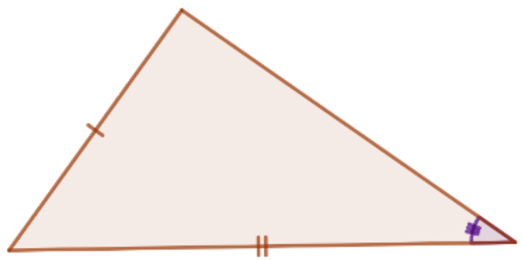




eller

1 vinkel og 2 sider:





Ø4 Pythagoras

Eksperimenterende tilgang til retvinklede trekanter og bi-implikation med Pythagoras læresætning. Denne øvelse er ikke en nødvendig del af Månefortællingen, men er en opvarmning til at bestemme afstanden til horisonten i øvelse Ø10.

Mulige tilgange med faldende sværhedsgrad:

A. Eleverne arbejder eksperimenterende ud fra instruktionen: ”Dan en retvinklet trekant med en snor”. De skal selv finde frem til en Pythagoræisk tripel og hvordan de vil konstruere den med snoren. Der bruges ikke målebånd.
B. Eleverne får instruktionen om at danne en retvinklet trekant med en snor opdelt i 12 lige store stykker med knuder. Efterfølgende konstruerer de tre kvadrater og efterprøver Pythagoras læresætning ved opmåling.
C. Samme som B, men uden knuderne. Den retvinklede trekant laves på øjemål.

Materialer:

- Snor og pløkker (9 stk. pr. gruppe).
- Målebånd anvendes til version **B** og **C**.
- I ”Præsentationen” er der en illustration af den Pythagoræiske tripel.

Læreintro:

“Kan enhver trekant opdeles i **to** retvinklede trekanter? Brug pinde til at undersøge: læg en trekant, og konstruér en **højde**. Virker det for spids, stump og ret trekant?
Hvad kan vi så sige om, at enhver trekant kan sammensættes af to retvinklede trekanter?”

”Rette vinkler ses ofte i menneskeskabte ting, men sjældent i naturen - alligevel kan man konstruere en retvinklet trekant uden tekniske hjælpemidler. Man behøver blot noget der kan bøjes og sættes mærker på – det kunne være en snor.”

”Hvad er Pythagoras´ læresætning?” eller ”Hvad fortæller Pythagoras´ læresætning noget om?”

A.

Metode:

Brug snor og pløkker – eleverne vil ofte danne en retvinklet trekant ud fra øjemål. Det kan danne udgangspunkt for diskussioner om, hvordan man sikrer, at den faktisk er retvinklet, og om hvad der skal til, for at Pythagoras’ læresætning er opfyldt.

Opgaven:

Anvend <u>kun</u> det, I har, sammen med Pythagoras’ læresætning, til at danne en retvinklet trekant.

<u>Hint:</u> Uden målebånd er i nød til selv at beslutte hvor lang ”1” er.

B.

Metode og opgave:

- Bind 12 knuder med lige lang afstand imellem knuderne, og dan derefter en retvinklet trekant med snoren og 3 pløkker. Hver pløk skal være ud for en knude.
- Hver side i den retvinklede trekant udgør den ene side i et kvadrat. Dan de tre kvadrater med 6 pløkke og snor.
- Bestem arealerne af hvert kvadrat og check resultaterne efter med Pythagoras læresætning.

C.

1. Som **B**, men dan en retvinklet trekant (på øjemål) af snor og tre pløkker.

Ø5A Skygger (Hvis altså solen skinner)

Undersøgelser af omgivelserne ved opmålinger og beregninger af forhold.

Ved at måle og beregne forholdet mellem genstandes højde og deres skyggers længde finder eleverne skaleringsfaktoren for ligedannede trekanter.

Øvelsen har et udleveringsark**,** hvor eleverne kan tegne skitser, skrive data og udføre beregninger.

Hver gruppe skal bruge et målebånd og en lommeregner**.**

I **"**Præsentationen**"** er der en illustration af geometrien og formler til opsamling.

Læreintro:

"Når solen skinner, kaster vi alle en skygge. Hvad afhænger skyggens længde af? Hvad sker der med skyggens længde, hvis vi halverer genstandens højde? Hvornår på dagen er skyggen længst?"

Metode:

Måle højder af genstande og deres skygger. Beregn de forhold/brøker der er angivet på udleveringsarket. Brug kun få decimaler.

Opgaven:

Find 2-3 genstande. Mål og udfyld først skemaet og udfør derefter beregningerne på udleveringsarket.

Opsamling:

Vælg en elev, og stil en pind i elevens skygge, så toppen af skyggerne falder sammen. Placer en pløk hvor toppen af skyggerne er flader sammen og træk en snor mellem pløkke og elevens hoved. Italesæt de to retvinklede trekanter, der opstår; diskutér hvorfor de er retvinklede, og hvorfor de er ligedannede – træk på erfaringerne fra de tidligere øvelser. I "præsentationer" er der et ark med geometrien og algebraen for skaleringsfaktoren mellem to ligedannede trekanter.

Ø5A Uddelingsark ***Denne side skal du anvende hvis solen skinner***

Find 2-3 forskellige genstande der står vinkelret på jordoverfladen, og som det er muligt at måle højden af.

Mål og udfyld skemaet for hver genstand:

Genstand 1		Genstand 2		Genstand 3	
Skitse/navn:		Skitse/navn:		Skitse/navn:	
Højde 1	Skygge 1	Højde 2	Skygge 2	Højde 3	Skygge 3

Beregn følgende forhold/brøker:

Højder	Skygger
$\frac{\text{Højde 1}}{\text{Højde 2}} = \frac{\qquad}{\qquad} =$	$\frac{\text{Skygge 1}}{\text{Skygge 2}} = \frac{\qquad}{\qquad} =$
$\frac{\text{Højde 1}}{\text{Højde 3}} = \frac{\qquad}{\qquad} =$	$\frac{\text{Skygge 1}}{\text{Skygge 3}} = \frac{\qquad}{\qquad} =$
$\frac{\text{Højde 3}}{\text{Højde 2}} = \frac{\qquad}{\qquad} =$	$\frac{\text{Skygge 3}}{\text{Skygge 2}} = \frac{\qquad}{\qquad} =$

Afrund resultatet af jeres beregninger til én decimal.

Målinger har altid en vis usikkerhed, men kan I finde en systematik i resultaterne?

Ø5B Snorstråle (Hvis solen ikke skinner)

Modellering og undersøgelser af omgivelserne ved opmålinger og beregninger af forhold.

Ved at danne retvinklede trekanter med snor og pløk skal eleverne måle og beregne forholdet mellem genstandes højde og deres "skyggers" længde. De finder skaleringsfaktoren for ligedannede trekanter.

Øvelsen har et udleveringsark**,** hvor eleverne kan tegne skitser, skrive data og udføre beregninger.

Hver gruppe skal ud over snor og pløk, bruge et målebånd og en lommeregner**.**

I **"**Præsentationen**"** er der en illustration af geometrien og formler til opsamling.

Læreintro:

"Når solen skinner, kaster vi alle en skygge. Hvad afhænger skyggens længde af? Hvad sker der med skyggens længde, hvis vi halverer genstandens højde? Hvornår på dagen er skyggen længst?"

Vælg en elev og bed eleven om at holde en snor til toppen af sit hoved. Stram snoren ud med en pløk i jorden. Anvend en pind ca. halvt så lang som eleven er høj, og placer den mellem eleven og pløkken, så toppen af pinden flugter med snoren. Italesæt de to retvinklede trekanter, der opstår, og diskutér, hvorfor de er retvinklede, og hvorfor de er ligedannede.

Metode:

Fastgør snoren til et træ, og dan en retvinklet trekant ved at fastgøre den anden ende af snoren med en pløk i jorden. Placer en pind mellem træ og pløk, og mål højderne og længderne, som angivet på uddelingsarket. Beregn de forhold/brøker, der er angivet på udleveringsarket. Brug kun få decimaler.

Opgaven:

Fastgør snoren til et træ, og dan en retvinklet trekant ved at fastgøre den anden ende af snoren, med en pløk i jorden. Tegn en skitse på uddelingsarket, mål, og udfyld først skemaet; udfør derefter beregningerne.

Opsamling:

Benyt en af gruppernes konstruktioner. Italesæt de to retvinklede trekanter, der opstår; diskutér, hvorfor de er retvinklede, og hvorfor de er ligedannede – træk på erfaringerne fra de tidligere øvelser. I "præsentationer" er der et ark med geometrien og algebraen for skaleringsfaktoren mellem to ligedannede trekanter.

Ø5B Uddelingsark ***Denne side skal du anvende hvis solen <u>ikke</u> skinner***

1. Bind den ene ende af en snor fast på et træ. Højden af træet, fra jorden op til snoren, kaldes *H*.
2. Stram snoren og fastgør den til jorden med pløkken, som en bardun på et telt. Afstanden fra pløkken hen til træet kaldes L.

I har nu én retvinklet trekant – tegn en skitse af opstillingen og skriv bogstaverne på siderne.

Dan flere retvinklede trekanter inden i den i lige har konstrueret, ved at placere en pind i jorden 2 forskellige steder mellem træet og pløkken. Højden af pinden op til snoren, kaldes *h* og afstanden fra pløk til pind kaldes l. Tegn også dem ind i skitsen.

Tegn en skitse af jeres opstilling og skriv de relevante bogstaver fra skemaet ind på siderne af trekanterne.

Mål og udfyld skemaet:

Træ		Pind position 1		Pind position 2	
Højde *H*	Afstand *L*	Højde h_1	Afstand l_1	Højde h_2	Afstand l_2

Beregn følgende forhold:

$\frac{Højde\ H}{Højde\ h_1} = \underline{\qquad\qquad} =$ $\qquad$ $\frac{Længde\ L}{Længde\ l_1} = \underline{\qquad\qquad} =$

$\frac{Højde\ H}{Højde\ h_2} = \underline{\qquad\qquad} =$ $\qquad$ $\frac{Længde\ L}{Længde\ l_2} = \underline{\qquad\qquad} =$

Afrund resultatet af jeres beregninger til én decimal. Målinger har altid en vis usikkerhed, men kan I finde en systematik i resultaterne?

Ø6 Bestem højden af et træ.

Modellering og undersøgelser af omgivelserne ved opmålinger og beregninger af forhold.

I direkte forlængelse af øvelse 5A eller 5B får eleverne til opgave, uden yderligere instruktion, at bestemme højden af et træ.

Læreintro:

”Bestem højden af dét træ.”

Fremgangsmåde:

Lad eleverne diskutere og gå undersøgende til værks.

Opsamling:

Her samles hele forløbet op for at perspektivere det opnåede resultat. ”Vi startede med at dreje rundt om os selv og definerede det til at svare til 360°**.** Derefter argumenterede vi for, at der måtte være en vinkelsum på 180° i alle trekanter. At vinkelsummen i alle trekanter er 180**°**, brugte vi til at argumentere for, at trekanterne med skyggerne fra Solen er **ligedannede**, og at der findes en skaleringsfaktor mellem to ligedannede trekanter.
Med denne viden har **I** nu bestemt højden af et træ — altså højden af noget, der er højere end os, uden at vi behøver at kravle op i det. Nu er vi på vej mod Månen…
Herfra kan man træne skaleringsfaktoren i ligedannede trekanter i Øvelse 7, eller springe til Øvelse 8 – Afstanden til Månen**.**

Ø7 Ligedannede/ensvinklede trekanter.

Opgaver hvor elever kan teste om de behersker skaleringsfaktoren ved klassisk opgaveløsning. Denne øvelse er ikke en nødvendig del af Månefortællingen.

Læreintro:

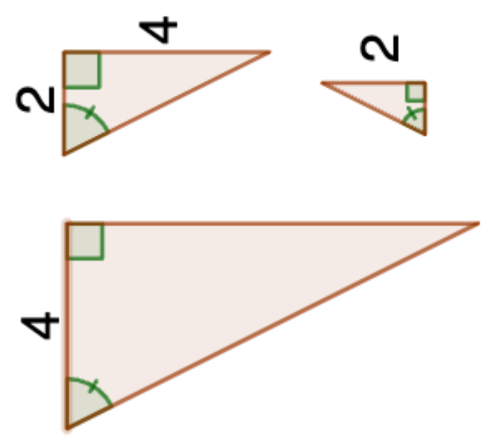
- Opsummering af skaleringsfaktoren og uddeling af uddelingsark.
- I ”Præsentationen” er der en forstørret udgave af uddelingsarket.

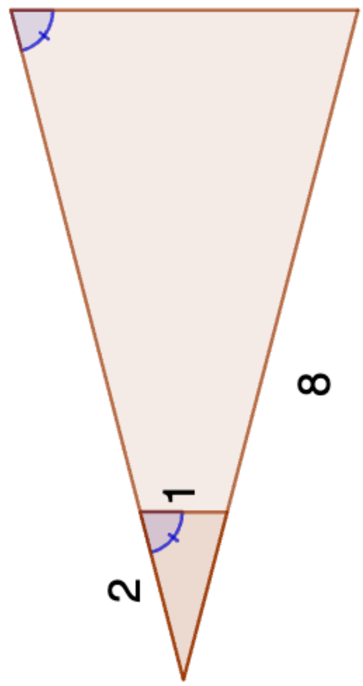
Metode:

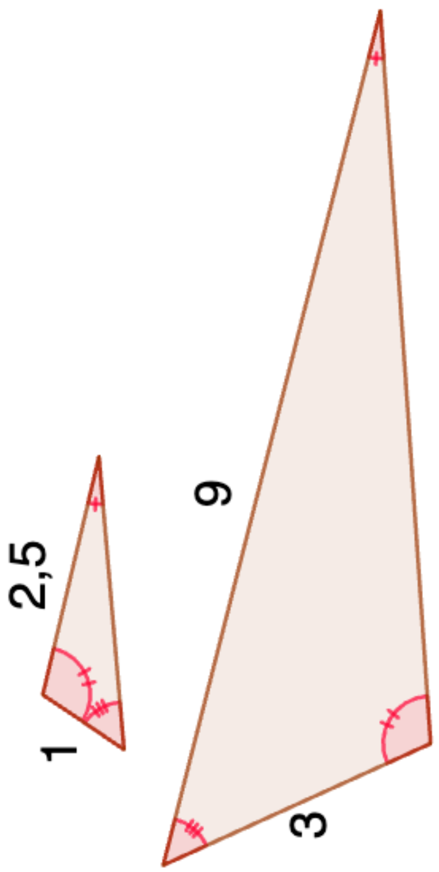
Identificér de to ligedannede trekanter. Vælg én side med et tal og find den tilhørende side i den anden trekant.

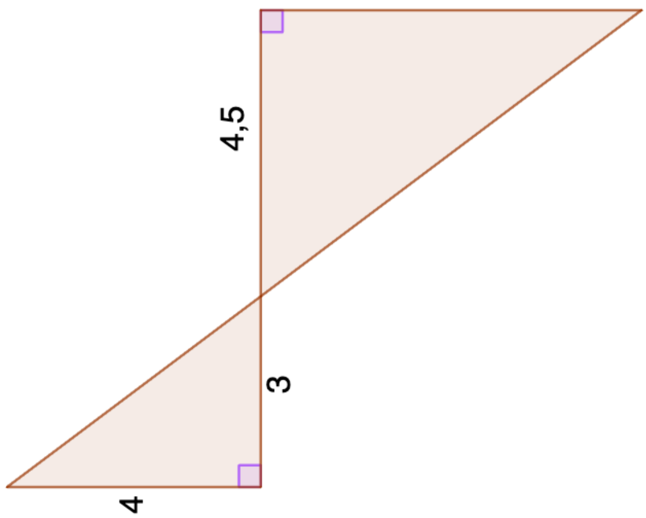
Opgaven:

Finde de manglende sider i trekanterne og argumentere for hvordan de er fundet.


4
2
4
2


8
1
2


2,5
1
9
3


4,5
3
4

Ø8 Jordens radius

Modellering og problemløsning ved brug af viden fra de tidligere øvelser.

Først bestemmes Jordens omkreds ved hjælp af geometriske argumenter, derefter bestemmes Jordens radius.

Man skal bruge den aktuelle solvinkel; den kan findes på SunEarthTools.com, eller bestemmes med en pind i jorden rettet direkte mod solen og en vinkelmåler ("Måling" på IPhone)

Derudover skal man finde en by, hvor solen står i zenit, og afstanden til denne by. Her kan man anvende timeanddate.com og distance.to.

Der skal anvendes et udleveringsark, der illustrer geometrien.

I "Præsentationen" er der en cirkel til opsamling - en forstørret udgave af udleveringsarket.

Læreintro:

En fortælling (med mange tal), om bestemmelse af jordens omkreds (Erastosthene ~250 fvt) suppleret med Columbus' beregninger (~1484). Kort fortalt kunne Columbus ud fra flere prominente kilder argumentere sig frem til, at de kendte beboelige egne bredte sig 300^0 på kloden. Da han mente at kende Jordens omkreds til 30.000 km, regnede han sig frem til, at der kun måtte være 5000 km til Asien (kan formuleres som en opgave). Konsensus på hans tid var tæt på de korrekte 40.000 km, så andre mente at der så måtte være mindst 6.500 km. Typisk rejsetid inden skørbugen satte ind, var på den tid 3 uger, og med en fart på ca. 150 km i døgnet, svarer det til en maksimal rejsedistance på ca. 3000 km – meget langt fra de 6.500 km, som var en af grundene til den modstand han mødte i Spanien. Rejsen endte med at være 5.500 km og han måtte lyve for sømændene for at undgå mytteri.

Opstart/repetition af cirklen:

- Tegn en cirkel og tegn/skriv alle de ting i ved om en cirkel.
- Hvordan kan man mest kortfattet og præcist beskrive en bestemt cirkel for en anden, kun i ord?
- Stil to pinde parallelt – hvordan kan vi sikre os at de er parallelle?
- Læg en tredje pind så den ligger på tværs af de to andre – hvad kan vi sige om de otte vinkler der nu er? (Repetition af øvelse Ø2)

Metode:

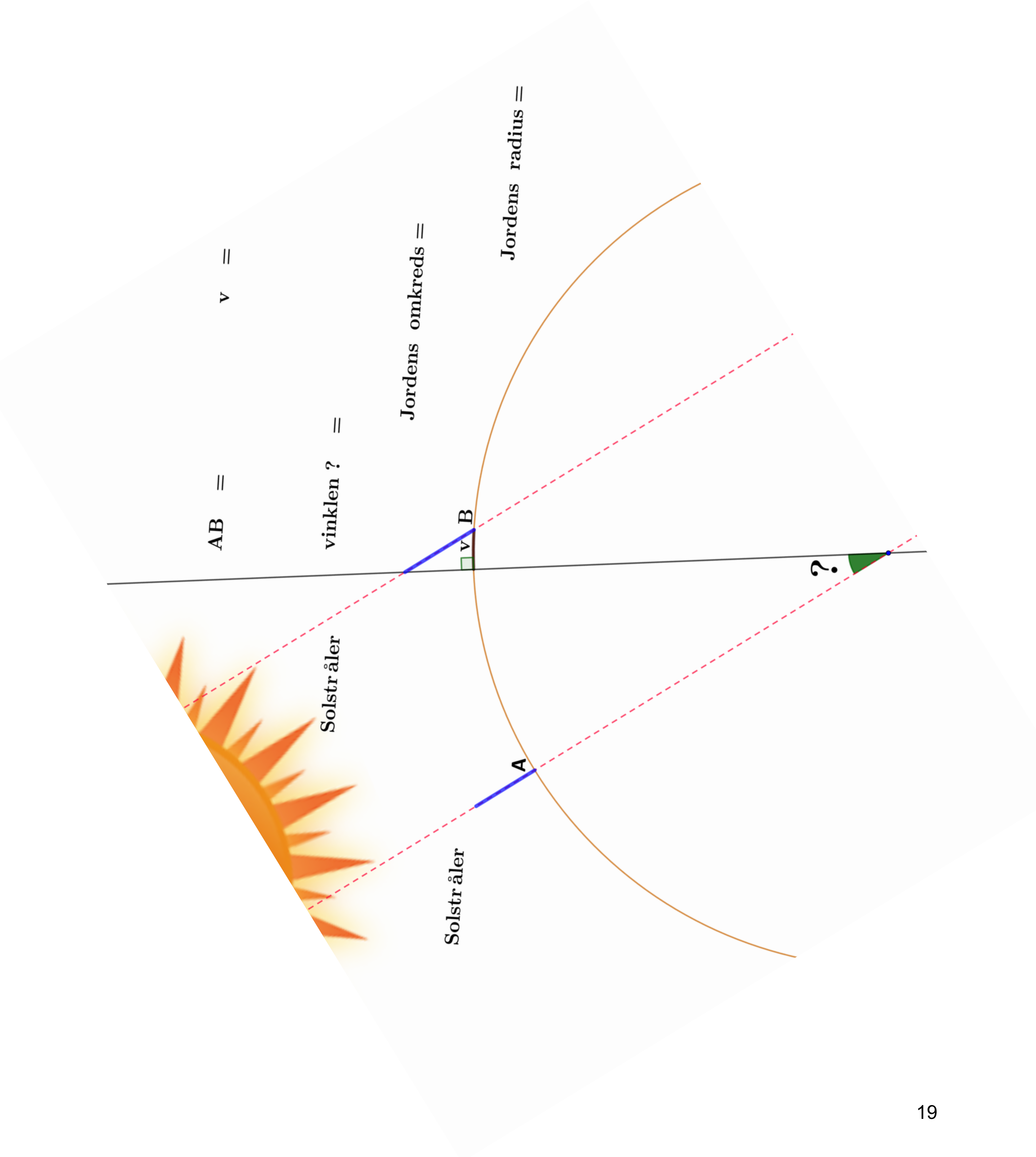
Eleverne får som afslutning på fortællingen oplyst solvinklen, hvis de ikke selv bestemmer den, samt afstanden til byen nærmest zenit.

Skinner solen, kan eleverne anbringe en lige pind/gren eller en udstrakt snor, så den ikke kaster nogen skygge; solens indstrålingsvinkel måles eller bestemmes med de trigonometriske funktioner, hvis eleverne kender dem.

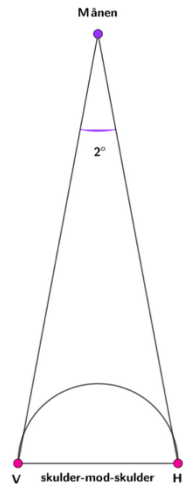
Opgaven:

Gendan modellen på udleveringsarket på jorden med tre pinde. De to stiplede og den fuldt optrukne. Brug en lille pind til at være jordoverfladen. Bestem nu Jordens omkreds og radius.

Ø8 Uddelingsark



Ø9 Afstanden til Månen, afslutning.



Modellering og problemløsning ved brug af viden fra de tidligere øvelser.

Forståelse af den første øvelse Ø1, som model for Måne-Jord afstanden. Parallaksemetoden introduceres som værktøj, og ligedannede trekanter anvendes til at bestemme Måne-Jord afstanden.

Der skal anvendes en lommeregner.

I ”Præsentationen” er der forstørret udgave af udleveringsarket.

De to udstrakte lillefingre i Ø1 svarer typisk til ca. 2°, hvilket omtrent er den vinkel, Jorden fylder på himlen set fra Månen. Jordens diameter er ca. 12.800 km, og middelafstanden til Månen er ca. 384.000 km. Månen er derfor ca. 30 jorddiametre væk.

Introduktion:

Eleverne stiller sig som i udgangspunktet i Ø1, (og gentager måske øvelsen) - de forklares hvordan hver gruppe udgør en ligebenet trekant, og at dem der stod stille, er en model for Jorden og dem der gik, står i en afstand, der svarer til afstanden til månen i modellen.

”Hvad kan vi sige om afstanden mellem Jorden og månen ud fra modellen? Og kan vi beregne den?”

”For at bestemme afstanden ud til månen, har vi brugt jordens radius og vinklen på de 2°. Nu skal i se hvordan vinklen er bestemt, uden at forlade Jorden!”

Parallakse-metoden: Bed eleverne om at løfte deres pegefinger i strakt arm op foran deres ansigt, og sigte mod en klassekammerat. Derefter skal de skiftevis åbne det ene øje, mens de lukker det andet. Hvad oplever de? - denne effekt anvendes til at bestemme vinklen på de 2°.

Udleveringsark deles ud, og eleverne arbejder selvstændigt.

Metode:

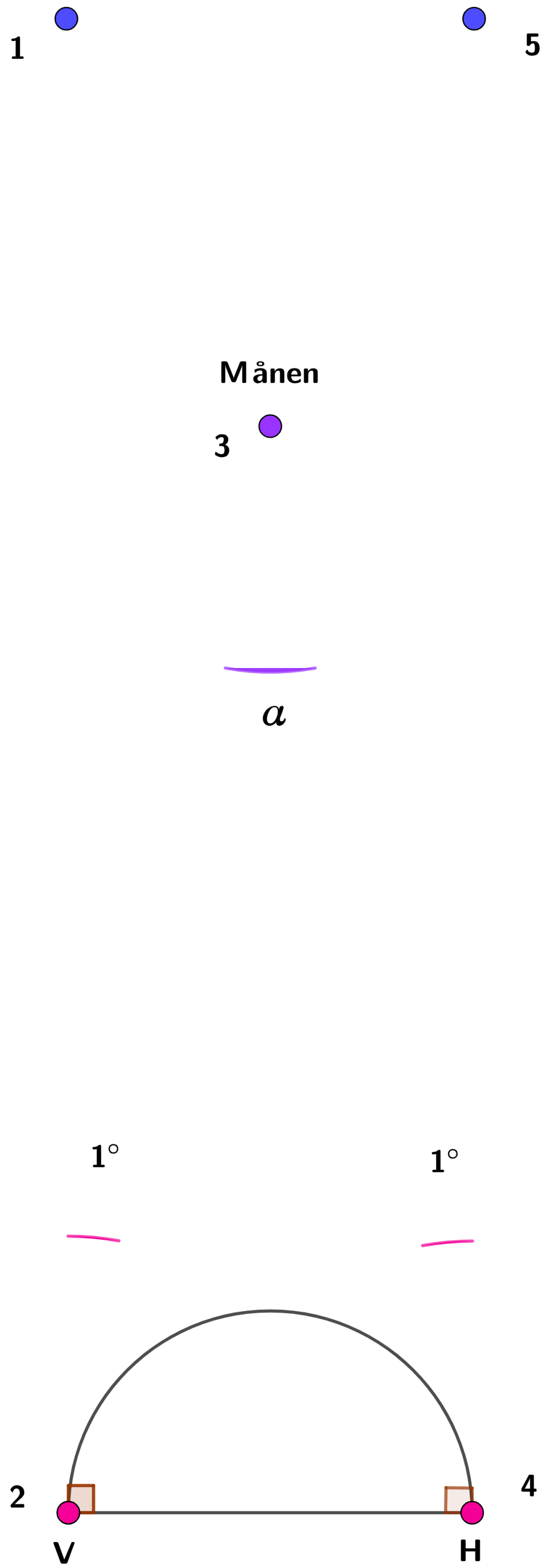
Spørgsmål på udleveringsark:

1. Connect the dots.
2. V og H står for dit venstre og højre øje - månen er en klassekammerat. Undersøg om et træ i baggrunden flytter sig og passer med placeringen af Aldebaran.
3. På den tegnede model af virkeligheden kan man se de vinkler man ville måle, hvis V og H var to steder på hver sin side af Jorden. Hvad er hvad er parallaksen α (Hint: hvad er vinkelsummen i alle trekanter?)

Opsamling:

Tale om den åbenlyse måleusikkerhed. At Aldebaran er vist to gange, fordi det er den eneste måde at have den med på tegningen, når den er uendeligt langt væk og sigtelinjerne antages at være parallelle. Denne metode anvendes til at bestemme afstande i universet.

Ø9 Uddelingsark



1. Connect the dots.
2. V og H står for dit venstre og højre øje - månen er en klassekammerat. Undersøg om et træ i baggrunden flytter sig og passer med placeringen af Aldebaran.
3. På den tegnede model af virkeligheden kan man se de vinkler man ville måle, hvis V og H var to steder på hver sin side af Jorden. Hvad er hvad er parallaksen α (Hint: hvad er vinkelsummen i alle trekanter?)

Ø10 Afstanden til horisonten

Modellering og problemløsning ved brug af viden fra de tidligere øvelser.

Identificér den retvinklede trekant i problemet og navngiv siderne i forhold til Pythagoras' læresætning.

Der skal anvendes en lommeregner.

Eleverne kan enten konstruere modellen på et blankt udleveringsark ud fra lærerens instrukser, eller få udleveret det tilhørende udleveringsark med geometrien indtegnet.

I "Præsentationen" er der forstørret udgave af udleveringsarket.

Læreintro:

"Jordens centrum ligger lige under dine fødder og din krop er en forlængelse af jordens radius. Sådan forholder det sig, uanset hvor du står på jorden - også hvis du gik ud til det fjerneste punkt, du kan se i horisonten. I den foregående øvelse bestemte i Jordens radius, så vi ved at der går en ca. 6000 km lang lige linje fra dine fødder ind til Jordens centrum.

Der er på tilsvarende måde en 6000 km lang linje fra punktet i horisonten ind til Jordens centrum. Vi vil gerne bestemme hvor lang linjen fra din næse til punktet i horisonten er."

Lad eleverne arbejde med at tegne en model eller udlever uddelingsark. Diskussion af geometrien og egenskaberne ved tangenter til cirkler.

(6000 km er valgt for at gøre udregningerne mere overskuelige. Det kan lette opgaven at regne i meter og anvende en personhøjde på 2 m.)

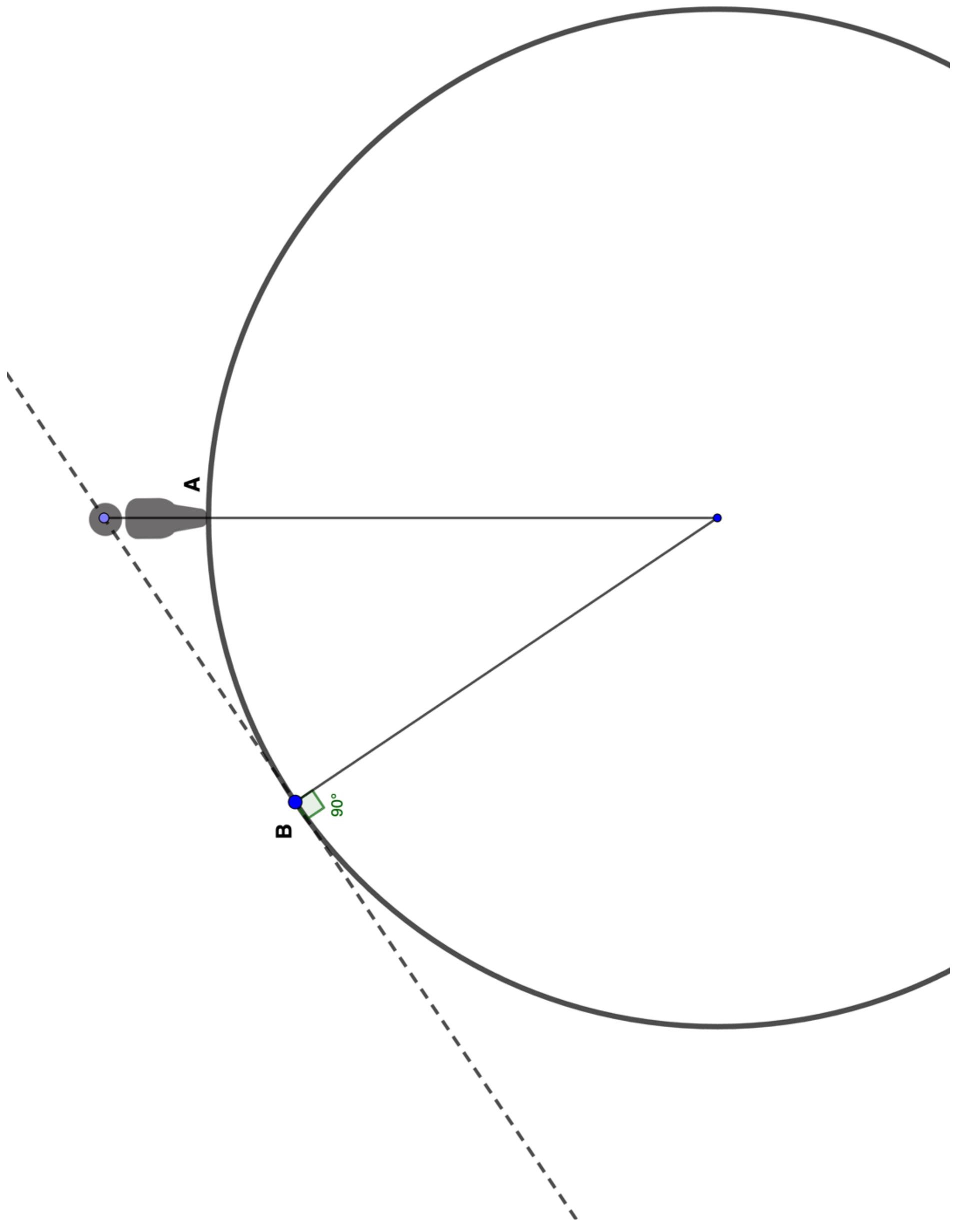
Metode:

Tegne model af den retvinklede trekant og identificér a, b og c. Omskriv Pythagoras' læresætning og bestem den side, der angiver sigtelinjen til horisonten.

Opgaven:

Hvor langt er der fra dine øjne til punktet i horisonten?

Ø10 Uddelingsark



Ø11 På egen hånd

Hvor eleverne afkoder matematiske problemstillinger og anvender matematisk modellering gennem praktisk brug af geometriske metoder.

Eleverne skal bringe deres viden om ligedannede trekanter og skaleringsfaktor i spil til at bestemme højder og afstande i omgivelserne.

Det, der skal bestemmes højde, bredde eller afstand til, kan enten fastsættes af læreren, eller eleverne beslutter det selv.

Idéer til, hvilken matematisk model der kan bruges til at løse et konkret problem, kan de finde inspiration til på udleveringsarket. Her er der også plads til, at de kan tegne deres egne modeller, nedskrive resultater og foretage beregninger.

De skal anvende målebånd, lommeregner og uddelingsark. Derudover kan de få udleveret pløkker og snor, men opfordres til at anvende sig selv eller genstande de finder, som målepunkter.

I ”Præsentationen” er der en forstørret udgave af udleveringsarket.

Læreintro:

”Den viden I nu har om ligedannede trekanter kan anvendes til at løse problemer i den virkelige verden. Helt konkret kan vi bestemme højder og afstande i det fjerne, ved at måle det nære.”

Repetér skaleringsfaktoren/forholdet for ligedannede trekanter.

”Vi kan bestemme højden af et træ, men man kan også anvende samme metode til at bestemme afstanden til et utilgængeligt sted, som et skib. Kort fortalt skal vi konstruere to ligedannede trekanter, hvor den ene er lille nok til at vi kan måle dens sider og så skal vi kunne måle én side i den anden.”

Uddel udleveringsark og forklar metoden, som er beskrevet herunder.

Metode:

Find objekter som man ønsker at finde højden af eller afstanden til. Træer, en bakke, et tårn, et vandløb, en sø eller en kyst giver opgaven relevans. Man kan begynde med at vælge samme opgave til hele klassen.

1. Betragt figurerne på udleveringsarket.
   - Match de tilsvarende sider i de to trekanter.
   - Hvis vi kender længderne af to matchene sider, kan vi beregne skaleringsfaktoren.
   - Mål den side der matcher den side du gerne vil bestemme længden af.
2. Figurerne skal dannes i virkeligheden. Punkterne på figurerne kan være genstande eller personer, der placeres som punkterne på figuren.
   - Cirklerne er forslag til hvor man kan stille sig og sigte fra, for at få ”punkterne” til at stå på linje.

Opgaven:

Bestem afstande og højder – sammenlign metoder og resultater med de andre grupper.

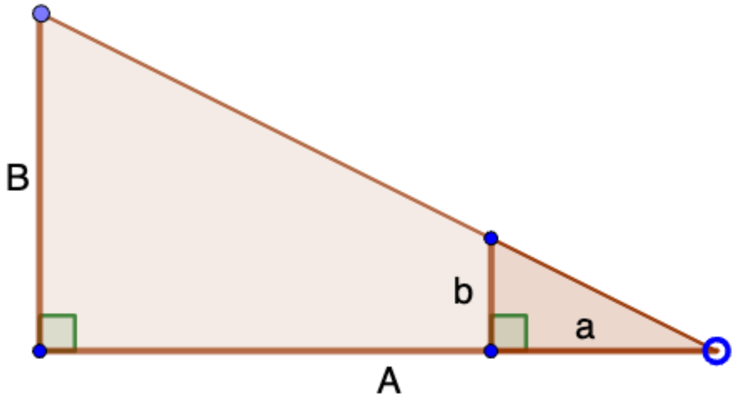
Én måde…

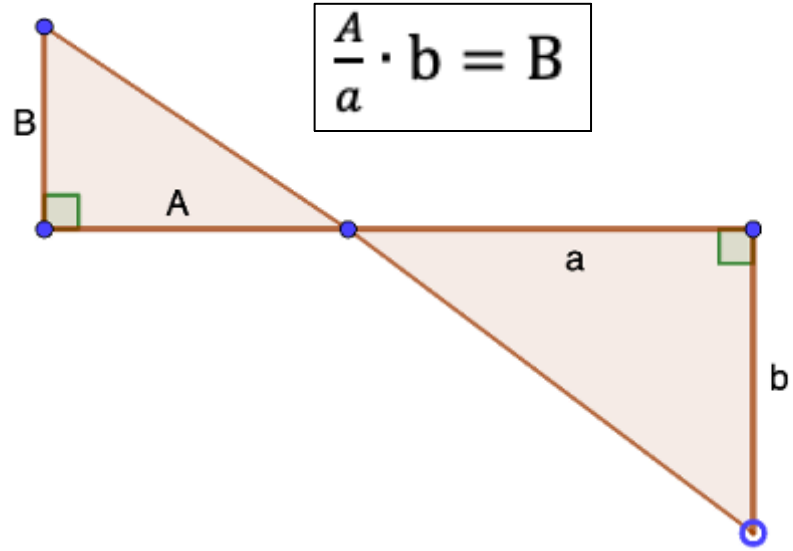
- Matchende sider har samme bogstav.
- Én stiller sig som ”cirkel”.
- Skab den lille trekant ved at markere hjørnerne af trekanten.
- ”Cirkel” sigter på hjørnerne af den store trekant og flytter på hjørnerne af den lille trekant til de er på linje.

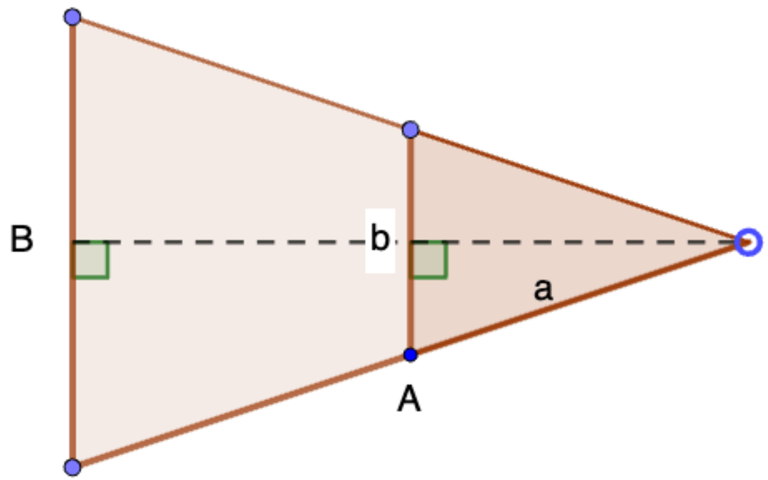
○ Position hvorfra man sigter

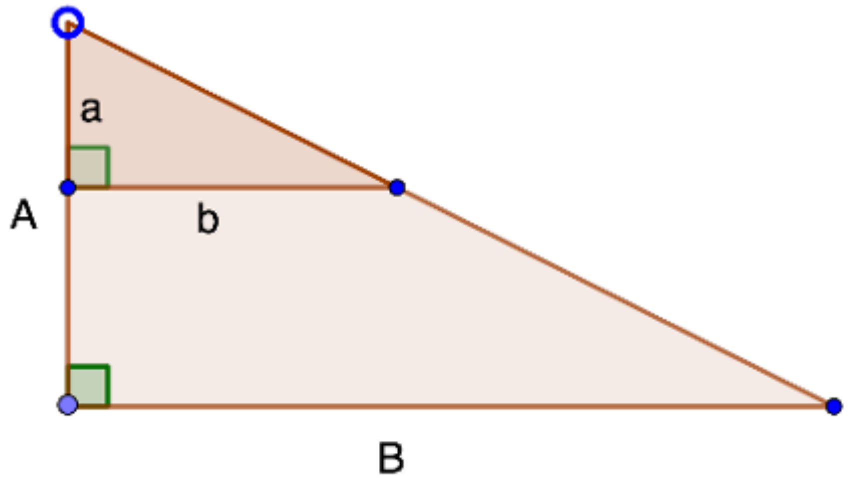
• Person eller genstand

$$\frac{A}{a} \cdot b = B$$









Ø10 Uddelingsark (2/2)

Tegn en model/skitse med den geometriske figur i vil benytte. Skriv bogstaver på siderne og navne på trekanternes hjørner.

Mål, det der *kan* måles og udfyld skemaet					
a	b	c	A	B	C

Beregn skaleringsfaktoren:

$$k = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

Beregn længden af den sidste side: